Équation différentielle de Heun et propriétés des fonctions de Heun

Auteur : Henri Lévêque, 62 rue de la Liberté, Carcassonne, henrilevequehanoi@gmail.com

En rédigeant un document concernant la construction de solutions aux problèmes extérieures de l'équation de Laplace en coordonnées « cyclidiques », je me suis aperçu qu'il serait difficile de se passer d'une description et de quelques propriétés des fonctions de Heun et de l'équation différentielle associée. L'essentiel des résultats donnés ici vient de « NIST Handbook of Mathematical Functions : Heun functions ».

L'équation de Heun s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Equation de Heun}\quad \begin{cases} y''(z)+\left\{\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\dfrac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0 \\ \text{Contrainte de Fuchs}\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases}$$

C'est une équation qui possède 4 points singuliers z=0, z=1, z=a et z=∞. Sur chacun de ces points singuliers, si l'on développe une solution en série de Fröbenius, l'équation indicielle associée donne les exposants et les formes suivantes de développement :

$$\text{Exposant } \lambda \qquad z=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1-\gamma\end{cases} \qquad z=1\rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1-\delta\end{cases} \qquad z=a\rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1-\varepsilon\end{cases} \qquad z=\infty\rightarrow\begin{cases}\lambda=\alpha\\ \lambda=\beta\end{cases}$$

Développement de Fröbenius

$$z=0\rightarrow\begin{cases} y_1(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n \\ y_2(z)=z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n z^n \end{cases} \qquad z=1\rightarrow\begin{cases} y_1(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (1-z)^n \\ y_2(z)=(1-z)^{1-\delta}\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (1-z)^n \end{cases}$$

$$z=a\rightarrow\begin{cases} y_1(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (z-a)^n \\ y_2(z)=(z-a)^{1-\varepsilon}\sum_{n=0}^{n=+\infty} b_n (z-a)^n \end{cases} \qquad z=\infty\rightarrow\begin{cases} y_1(z)=z^{-\tilde{\alpha}}\sum_{n=0}^{n=+\infty} \dfrac{b_n}{z^n} \\ y_2(z)=z^{-\tilde{\beta}}\sum_{n=0}^{n=+\infty} \dfrac{b_n}{z^n} \end{cases}$$

Ces développements sont des formes locales valables autour du point singulier dans un rayon de convergence défini. Sans entrer dans les détails le rayon de convergence est en général inférieur à un. Communément lorsque l'on parle des fonctions de Heun, on parle donc le plus souvent et dans un premier temps de ces solutions locales. Elles sont notées : $HeunG(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$ *selon les notations de Mathematica, auquel je rajouterais l'indice l pour local, soit* $HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$. *Comme ces fonctions sont définies par un développement de Fröbenius, non convergeant partout, elles ne sont pas aptes à représenter les solutions d'un problème aux limites de Sturm-Liouville, par exemple entre [0,1] qui sont deux singularités de l'équation de Heun.*

L'équation différentielle de Heun est une équation différentielle Fuchsienne. Tous ces points singuliers, y compris le point à l'infini sont des points singuliers réguliers. Les divers paramètres sont contraints par la relation de Fuchs qui garanti justement que les points singuliers sont réguliers. Pour toute équation fuchsienne du second degré dont les termes peuvent se développer autour de la singularité z0 , comme suit :

$$\begin{cases} y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0 \\ P(z) = \dfrac{p_0}{z - z_0} + O(1) \quad Q(z) = \dfrac{q_0}{(z - z_0)^2} + O\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) \end{cases}$$

Alors l'équation indicielle est fort simple : $r^2 + r(p_0 - 1) + q_0 = 0$.

Pour le point à l'infini, si le développement autour du point singulier à l'infini de P(1/ζ) et Q(1/ζ), ζ=1/z est de la forme : $\begin{cases} P\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right) = \dfrac{p_0}{\varsigma} + O(1) \\ Q\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right) = \dfrac{q_0}{\varsigma^2} + O\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right) \end{cases} \Rightarrow r^2 + r(1 - p_0) + q_0 = 0$

Appliquons ces résultats à l'équation de Heun :

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z) + \frac{\alpha\beta\, z - q}{z(z-1)(z-a)}y(z) = 0$$

$$\textit{Point singulier } z = 0 \quad p_0 = \gamma \quad q_0 = 0 \Rightarrow I(r) = r^2 + r(\gamma - 1) \Rightarrow r = 0 \quad r = 1 - \gamma$$

$$\textit{Point singulier } z = 1 \quad p_0 = \delta \quad q_0 = 0 \Rightarrow I(r) = r^2 + r(\delta - 1) \Rightarrow r = 0 \quad r = 1 - \delta$$

$$\textit{Point singulier } z = a \quad p_0 = \varepsilon \quad q_0 = 0 \Rightarrow I(r) = r^2 + r(\gamma - 1) \Rightarrow r = 0 \quad r = 1 - \varepsilon$$

$$\begin{cases} p_0 = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z\left(\dfrac{\gamma}{z} + \dfrac{\delta}{z-1} + \dfrac{\varepsilon}{z-a}\right) = \gamma + \delta + \varepsilon \Rightarrow 1 - p_0 = -\alpha - \beta \\ q_0 = \underset{z\to\infty}{Lim} \quad z^2 \dfrac{\alpha\beta\, z - q}{z(z-1)(z-a)} = \alpha\beta \end{cases}$$

$$\textit{Point singulier } z = \infty \Rightarrow r^2 + r(1 - p_0) + q_0 = (r - \alpha)(r - \beta) = 0 \Rightarrow r = \alpha \quad r = \beta$$

On a donc le p-Symbole de Riemann suivant : $y(z) = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{pmatrix}$

Les développements de Fröbenius sont des développements locaux autour de chaque point singulier de l'équation différentielle. De plus la convergence de ces développements n'est assurée qu'autour du point singulier dans un rayon qui exclu souvent tout autre point singulier à proximité dans le plan complexe. Aussi la résolution d'un problème de type Sturm-Liouville de la construction pour une équation différentielle requiert souvent des contraintes supplémentaires portant sur les divers paramètres de cette dernière. Lorsque j'évoque le problème de Sturm-Liouville, cela signifie classiquement construire la solution de l'équation différentielle dans l'intervalle entre deux points singuliers, pour lesquelles sont fixées des conditions limites homogènes portant sur la fonction, sa dérivée première ou toute combinaison linéaire de ces dernières.

Fonctions de Heun analytiques autour d'une, deux ou trois singularités

En effet aussi bizarre soit-il, l'étude des problèmes aux limites de Sturm-Liouville de l'équation de Heun n'est pas souvent clairement abordée dans la littérature scientifique, ou alors sous des vocables que je n'ai pas bien compris. Par contre les articles débordent de recherches d'autres type de développement notamment à l'aide de fonctions hypergéométriques (visant à obtenir soit une solution locale autour d'une singularité, soit entre deux singularités, développer dans ce document par la suite). C'est un petit paragraphe (31.4) dans le « NIST Handbook of Mathematical Functions » qui m'a mis la puce à l'oreille : « Solutions analytic at Two Singularities : Heun Functions ». Il y est très succinctement décrit la méthode de construction de fonctions analytiques sur deux points singuliers, comme 0 et 1, soit peut-être des fonctions aptes à être solutions d'un problème de Sturm-Liouville sur [0,1] aussi simple que celui que je viens de décrire. Toutefois la construction proposée s'attache à la résolution d'une équation transcendantale avec une fraction continue que je ne suis pas arrivé à implémenter de manière satisfaisante, car cela divergeait tout le temps ! (il s'agit de ma part d'une incompétence temporaire à implémenter convenablement l'algorithme de Bouwkanp sur les récurrences à trois termes, mais je me suis rattrapé grâce à l'implémentation des fonctions d'ondes sphéroïdales réalisé par P.E.Falloon).

Il existe une dernière sorte de fonctions de Heun, de forme polynomiale, analytique sur les trois points singuliers 0,1 et a, il s'agit des polynômes de Heun.

En réalité la construction de ces trois types de solutions part d'un même point de départ, la constitution de la récurrence du développement de Fröbenius autour de z=0. Pour obtenir les développement formels similaires, des secondes solutions on fait appel à des transformations dîtes F-Homotopiques, et pour obtenir les développements autour des autres points singuliers de transformations homographiques de l'argument z. Mais c'est de tout cela dont nous allons parler maintenant :

Récurrence du développement de la première solution autour de z=0

$$\textit{Première solution} \quad y_l(z) = HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j z^j \qquad \textit{avec} \qquad y_l(0)=1$$

$$\textit{Récurrence sur } c_j \quad \begin{cases} R_j = a(j+1)(\gamma+j) \\ Q_j = j\{(j-1+\gamma)(a+1)+\varepsilon+a\,\delta\} \\ P_j = (j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ c_{-1}=0 \qquad c_0=1 \\ R_j c_{j+1} - (Q_j+q)c_j + P_j c_{j-1} = 0 \quad j\geq 1 \end{cases}$$

Le calcul des dérivées première et seconde est alors simple :

$$\frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = \sum_{j=1}^{j=+\infty} j\, c_j z^{j-1} \Rightarrow \frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=0} = c_1 \neq 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = \sum_{j=2}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_j z^{j-2} \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=0} = 2c_2 \neq 0$$

*Pour développer la première solution sur les autres points singuliers de l'équation de Heun z=1,a ou ∞, on utilise **des transformations homographiques**.*

*Pour développer la seconde solution en z=0, on utilise **des transformations F-Homotopiques** que l'on va décrire.*

*Pour développer les secondes solutions sur les autres points singuliers de l'équation de Heun z=1,a ou ∞, on utilise **les combinaisons des transformations homographique et F-Homotopiques**.*

<u>Transformations F-Homotopiques des solutions de l'équation de Heun</u>

Il s'agit de rechercher la solution de l'équation de Heun sous trois formes différentes : $y(z)=z^{1-\gamma}y_I(z)$, $y(z)=(z-1)^{1-\delta}y_{II}(z)$ et $y(z)=(z-a)^{1-\varepsilon}y_{III}(z)$. On démontre alors que les trois fonctions sont également solutions de l'équation de Heun mais avec des jeux de paramètres différent :

$$y(z)=z^{1-\gamma}y_I(z)\Rightarrow y_I(z)=HeunG_l(a,q_I,\alpha_I,\beta_I,\gamma_I,\delta_I;z)\quad H_1\quad\begin{cases}q_I=q+(a\delta+\varepsilon)(1-\gamma)\\ \alpha_I=\alpha+1-\gamma\qquad \beta_I=\beta+1-\gamma\\ \gamma_I=2-\gamma\qquad \delta_I=\delta\qquad \varepsilon_I=\varepsilon\end{cases}$$

$$y(z)=(z-1)^{1-\delta}y_{II}(z)\Rightarrow y_{II}(z)=HeunG_l(a,q_{II},\alpha_{II},\beta_{II},\gamma_{II},\delta_{II};z)\quad H_2\quad\begin{cases}q_{II}=q+a\gamma(1-\delta)\\ \alpha_{II}=\alpha+1-\delta\qquad \beta_{II}=\beta+1-\delta\\ \gamma_{II}=\gamma\qquad \delta_{II}=2-\delta\qquad \varepsilon_{II}=\varepsilon\end{cases}$$

$$y(z)=(z-a)^{1-\varepsilon}y_{III}(z)\Rightarrow y_{III}(z)=HeunG_l(a,q_{III},\alpha_{III},\beta_{III},\gamma_{III},\delta_{III};z)\quad H_3\quad\begin{cases}q_{III}=q+\gamma(1-\varepsilon)\\ \alpha_{III}=\alpha+1-\varepsilon\qquad \beta_{III}=\beta+1-\varepsilon\\ \gamma_{III}=\gamma\qquad \delta_{II}=\delta\qquad \varepsilon_{III}=2-\varepsilon\end{cases}$$

Ces trois transformations homotopiques ont pour propriété simple d'annuler la fonction de Heun en chacun des points singuliers z=0,1,a tant que les paramètres γ, δ et ε sont des réels inférieurs à 1 :

$$\begin{aligned}y(z)&=z^{1-\gamma}y_I(z)\Rightarrow y(0)=0\quad si\quad \gamma<1\\ y(z)&=(z-1)^{1-\delta}y_{II}(z)\Rightarrow y(1)=0\quad si\quad \delta<1\\ y(z)&=(z-a)^{1-\varepsilon}y_{III}(z)\Rightarrow y(a)=0\quad si\quad \varepsilon<1\end{aligned}$$

Ces trois transformations homotopiques (plus la transformation identité) se combinent deux à deux, commutent entre-elles et formes donc un ensemble de 8 transformations de paramètres, pas plus de 8 car ce sont des involutions. En appliquant la première transformation on arrive ainsi à décrire le développement de la seconde solution autour de z=0 à l'aide d'une fonction de Heun elle-même :

$$Deuxième\ solution\quad y_2(z)=z^{1-\gamma}HeunG_l(a,q+(a\delta+\varepsilon)(1-\gamma),\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\delta;z)$$

Les quatre autres transformations homotopiques résultent de combinaisons de celles décrites auparavant, dont :

$$y(z)=z^{1-\gamma}(z-1)^{1-\delta}HeunG_l(a,q_{I,II};\alpha_{I,II},\beta_{I,II},\gamma_{I,II},\delta_{I,II};z)\quad H_{1,2}\quad \begin{cases} q_{I,II}=q+\varepsilon(1-\gamma)-a(\gamma+\delta-2) \\ \alpha_{I,II}=\alpha+2-\gamma-\delta \qquad \beta_{I,II}=\beta+2-\gamma-\delta \\ \gamma_{I,II}=2-\gamma \qquad \delta_{I,II}=2-\delta \qquad \varepsilon_{I,II}=\varepsilon \end{cases}$$

$$y(z)=z^{1-\gamma}(z-a)^{1-\varepsilon}HeunG_l(a,q_{I,III};\alpha_{I,III},\beta_{I,III},\gamma_{I,III},\delta_{I,III};z)\quad H_{1,3}\quad \begin{cases} q_{I,III}=q+1-\varepsilon+(1-\gamma)(1+a\delta) \\ \alpha_{I,III}=\alpha+2-\gamma-\varepsilon \qquad \beta_{I,III}=\beta+2-\gamma-\varepsilon \\ \gamma_{I,III}=2-\gamma \qquad \delta_{I,III}=\delta \qquad \varepsilon_{I,III}=2-\varepsilon \end{cases}$$

$$y(z)=(z-1)^{1-\delta}(z-a)^{1-\varepsilon}HeunG_l(a,q_{II,III},\alpha_{II,III},\beta_{II,III},\gamma_{II,III},\delta_{II,III};z)\quad H_{2,3}\quad \begin{cases} q_{II,III}=q+\gamma(1-\varepsilon+a(1-\delta)) \\ \alpha_{II,III}=\alpha+2-\delta-\varepsilon \qquad \beta_{II,III}=\beta+2-\delta-\varepsilon \\ \gamma_{II,III}=\gamma \qquad \delta_{II,III}=2-\delta \qquad \varepsilon_{II,III}=2-\varepsilon \end{cases}$$

$$y(z)=z^{1-\gamma}(z-1)^{1-\delta}(z-a)^{1-\varepsilon}HeunG_l(a,q_{I,II,III},\alpha_{I,II,III},\beta_{I,II,III},\gamma_{I,II,III},\delta_{I,II,III};z)\quad H_{1,2,3}\quad \begin{cases} q_{I,II,III}=q+2-\gamma-\varepsilon-a(\gamma+\delta-2)=q+1+\delta-\alpha-\beta-a(\gamma+\delta-2) \\ \alpha_{I,II,III}=\alpha+3-\gamma-\delta-\varepsilon=2-\beta \\ \beta_{I,II,III}=\beta+3-\gamma-\delta-\varepsilon=2-\alpha \\ \gamma_{I,II,III}=2-\gamma \qquad \delta_{I,II,III}=2-\delta \qquad \varepsilon_{I,II,III}=2-\varepsilon \end{cases}$$

Dans le cas d'une formulation à l'aide de variable jacobienne dans l'argument, notamment pour les problèmes aux limites en coordonnées cyclidiques, les produits qui précédent la fonction de Heun ont une valeur plus simple :

$$z=sn^2(x,k)\quad et\quad a=\frac{1}{k^2}\quad et\quad z,k\in[0,1]\qquad \begin{cases} H_1\to 1 \\ H_1\to z^{1-\gamma}\propto sn^{2(1-\gamma)}(x,k) \\ H_2\to(1-z)^{1-\delta}\propto cn^{2(1-\delta)}(x,k) \\ H_3\to\left(1-\frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon}\propto dn^{2(1-\varepsilon)}(x,k) \\ H_{1,2}\to z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\propto sn^{2(1-\gamma)}(x,k)cn^{2(1-\delta)}(x,k) \\ H_{1,3}\to z^{1-\gamma}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon}\propto sn^{2(1-\gamma)}(x,k)dn^{2(1-\varepsilon)}(x,k) \\ H_{2,3}\to(1-z)^{1-\delta}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon}\propto cn^{2(1-\delta)}(x,k)dn^{2(1-\varepsilon)}(x,k) \\ H_{1,2,3}\to z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon}\propto sn^{2(1-\gamma)}(x,k)cn^{2(1-\delta)}(x,k)dn^{2(1-\varepsilon)}(x,k) \end{cases}.$$

Pour construire les solutions autour des autres singularités on peut avoir recours aux transformation homographique de l'argument z qui permette de permuter des points entre eux. Nous allons en décrire simplement deux très simples, mais il en existe 24 en tout, dont on ne va se contenter que d'en décrire simplement deux dans ce qui suit.

Transformations homographiques élémentaires de l'équation de Heun

La transformation homographique élémentaire z->1-z donne une solution de l'équation de Heun suivante, autour de z=1 :

$$y_1(z) = HeunG_l(a_1, q_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; 1-z) \quad \begin{cases} a_1 = 1-a & q_1 = \alpha\beta - q \\ \alpha_1 = \alpha & \beta_1 = \beta \\ \gamma_1 = \delta & \delta_1 = \gamma \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \end{cases}.$$

$$y_1(z) = HeunG_l(1-a, \alpha\beta - q; \alpha, \beta, \delta, \gamma; 1-z)$$

Si on lui applique la première transformation F-Homotopique, on obtient la deuxième solution autour de z=1, soit :

$$y_2(z) = (1-z)^{1-\delta} HeunG_l(1-a, ((1-a)\gamma + \varepsilon)(1-\delta) + \alpha\beta - q; \alpha + 1 - \delta, \beta + 1 - \delta, 2 - \delta, \gamma; 1-z)$$

La transformation homographique élémentaire z->(a-z)/(a-1) donne une solution de l'équation de Heun suivante, autour de z=a :

$$y_1(z) = HeunG_l\left(a_a, q_a; \alpha_a, \beta_a, \gamma_a, \delta_a; \frac{a-z}{a-1}\right) \quad \begin{cases} a_a = \frac{a}{a-1} & q_a = \frac{a\alpha\beta - q}{a-1} \\ \alpha_a = \alpha & \beta_a = \beta \\ \gamma_a = \varepsilon & \delta_a = \delta \quad \varepsilon_a = \gamma \end{cases}$$

$$y_1(z) = HeunG_l\left(\frac{a}{a-1}, \frac{\alpha\beta a - q}{a-1}; \alpha, \beta, \varepsilon, \delta; \frac{a-z}{a-1}\right)$$

Et toujours en appliquant la première transformation F-Homotopique, on obtient la deuxième solution autour de z=a, soit :

$$y_2(z) = \left(\frac{a-z}{a-1}\right)^{1-\varepsilon} HeunG_l\left(\frac{a}{a-1}, \left(\frac{a(\delta+\gamma)-\gamma}{a-1}\right)(1-\varepsilon) + \frac{\alpha\beta a - q}{a-1}; \alpha + 1 - \varepsilon, \beta + 1 - \varepsilon, 2 - \varepsilon, \delta; \frac{a-z}{a-1}\right)$$

Ce sont les 6 formes de solutions données dans le « NIST Handbook of Mathematical Functions » , formules 31.3.5 à 31.3.9.

Dans une article de R.S.Maier de 2006, « The 192 Solutions of the Heun Equation », l'auteur donne le tableau exact de toutes les combinaisons possibles entre les 24 types de transformations homographiques et les 8 types de transformations F-Homotopiques pour construire les solutions locales de l'équation de Heun, aux 4 points singuliers. Cela donne 24x8=192 solutions possibles. La table 2 de l'article les énumère. Elles sont d'une grande importance y compris pour la construction des solutions bi-analytiques en deux points singuliers (valable pour les problèmes de Sturm-Liouville) car on peut toujours appliquer ces transformations pour atteindre d'autres solutions.

Récurrence du développement de la première solution autour de z=1

Il est également intéressant de réaliser le même développement autour de la seconde singularité z=1. Cela permet d'illustrer l'effet des transformations homographiques.

$$\text{Première solution} \quad y_l(z) = HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (1-z)^j \qquad \text{avec} \qquad y_l(1) = 1$$

$$\text{Récurrence sur } c_j \quad \begin{cases} R_j = (1-a)(j+1)(\delta+j) \\ Q_j = j\{(j-1+\delta)(2-a)+\varepsilon+(1-a)\gamma\} \\ P_j = (j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ c_{-1} = 0 \qquad c_0 = 1 \\ R_j c_{j+1} - (Q_j + (\alpha\,\beta - q))c_j + P_j c_{j-1} = 0 \quad j \geq 1 \end{cases}$$

Le calcul des dérivées première et seconde est alors simple :

$$\frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = -\sum_{j=1}^{j=+\infty} j\, c_j (1-z)^{j-1} \Rightarrow \frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=1} = -c_1 \neq 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = \sum_{j=2}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_j (1-z)^{j-2} \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=1} = 2c_2 \neq 0$$

On retrouve bien l'effet de la transformation homographique z->1-z. En appliquant cette transformation des paramètres comme suit :

$$\begin{cases} a_1 = 1-a \qquad q_1 = \alpha\beta - q \\ \alpha_1 = \alpha \qquad \beta_1 = \beta \\ \gamma_1 = \delta \qquad \delta_1 = \gamma \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon \end{cases}$$

sur la récurrence initiale du développement autour de z=0, on retrouve la récurrence du développement autour de z=1.

Récurrence du développement de la première solution autour de z=a

Réalisons le même développement autour de la seconde singularité z=a. Cela permet d'illustrer l'effet des transformations homographiques.

$$\textit{Première solution} \quad y_l(z) = HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j \left(\frac{a-z}{a-1}\right)^j \qquad \textit{avec} \qquad y_l(a)=1$$

$$\textit{Récurrence sur } c_j \quad \begin{cases} R_j = \dfrac{a}{a-1}(j+1)(\varepsilon+j) \\ Q_j = j\left\{(j-1+\varepsilon)\dfrac{2a-1}{a-1} + \gamma + \dfrac{a}{a-1}\delta\right\} \\ P_j = (j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ c_{-1} = 0 \qquad c_0 = 1 \\ R_j c_{j+1} - \left(Q_j + \dfrac{a\alpha\beta - q}{a-1}\right)c_j + P_j c_{j-1} = 0 \quad j \geq 1 \end{cases}$$

Le calcul des dérivées première et seconde est alors simple :

$$\frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = -\sum_{j=1}^{j=+\infty} \frac{j\,c_j}{a-1}\left(\frac{a-z}{a-1}\right)^{j-1} \Rightarrow \frac{d}{dz}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=a} = -\frac{c_1}{a-1} \neq 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\} = \sum_{j=2}^{j=+\infty} \frac{j(j-1)c_j}{(a-1)^2}\left(\frac{a-z}{a-1}\right)^{j-2} \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}\{HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\}\Big|_{z=a} = \frac{2c_2}{(a-1)^2} \neq 0$$

On retrouve bien l'effet de la transformation homographique z->(a-z)/(a-1). En appliquant cette transformation des paramètres comme suit :

$$\begin{cases} a_a = \dfrac{a}{a-1} \qquad q_a = \dfrac{a\alpha\beta - q}{a-1} \\ \alpha_a = \alpha \qquad \beta_a = \beta \\ \gamma_a = \varepsilon \qquad \delta_a = \delta \qquad \varepsilon_a = \gamma \end{cases}$$

sur la récurrence initiale du développement autour de z=0, on retrouve la récurrence du développement autour de z=a.

Solutions analytiques aux deux points singuliers z=0 et z=1, récurrence du développement, valeurs propres matricielles et condition d'existence de la solution analytique en z=0 et z=1

La construction que je propose est évoquée vaguement dans la littérature, mais à chaque fois éludée lorsqu'il s'agit d'une description concrète. Aussi je vais tenter d'exprimer la récurrence et la détermination des coefficients du développement comme un problème aux valeurs propres d'une matrice infinie. Revenons au développement autour de z=0, il peut s'exprimer comme un système d'équation linéaire de la forme :

$$y_I(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}c_j z^j \quad R_j c_{j+1}-(Q_j+q)c_j+P_j c_{j-1}=0 \qquad Avec \quad \begin{cases} R_j=a(j+1)(\gamma+j) \\ Q_j=j\{(j-1+\gamma)(a+1)+\varepsilon+a\delta\} \\ P_j=(j-1+\alpha)(j-1+\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}=[c_0,\ldots,c_{j-1},c_j,c_{j+1},\ldots]^t \quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} -Q_0 & R_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ P_1 & -Q_1 & R_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & P_{j-1} & -Q_{j-1} & R_{j-1} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & P_j & -Q_j & R_j & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & P_{j+1} & -Q_{j+1} & R_{j+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \quad (\mathbf{M}-q\mathbf{I}).\mathbf{C}=0$$

Autrement dit, il s'agit de trouver les valeurs propres q de la matrice M, et une fonction analytique en deux points possède un développement non trivial et convergeant si q est une valeur propre de cette matrice M (soit également que le déterminant de la matrice M-qI s'annule). Les vecteurs propres de la matrice, rangés par ordre croissant des valeurs propres contiennent chacun les coefficients du développement approchée de la fonction bi-analytique aux deux points z=0 et z=1. Plus la dimension de la matrice est importante, meilleure est la convergence des premières valeurs propres. Pour ma part j'ai préféré ce type de construction à celles proposées dans le paragraphe 31.4 consistant à résoudre une équation transcendantale impliquant la fraction continue que l'on peut également construire avec la récurrence précédente.

<u>Schéma de construction approchée des fonctions de Heun Bi-analytiques en deux points singuliers de l'équation</u>

On a donc choisi systématiquement la forme algébrique de l'équation de Heun. Pour une fonction bi-analytique de Heun, voici le schéma de construction des valeurs propres et fonctions propres pour le problème de Sturm-Liouville entre [0,1] telles que la fonction et sa dérivée première soient finies aux limites 0 et 1 (c'est à dire analytique en ces deux points et avec Mathematica, la résolution numérique est construite comme suit :

```
n1=20 ;
HeunEquationNuAlgebriques[a_,α_,β_,γ_,δ_,x_] :=
 x (x-1) (x – a) Derivative[2][y][x]+ x (x-1) (x-a) (γ/x +δ/(x-1)+( α +β+1-γ -δ)/(x-a)) Derivative[1][y][x]+x  α β y[x];
{HeunEigenValuesAlgebriques, HeunEigenFunctionsAlgebriques} =
  NDEigensystem[ HeunEquationNuAlgebriques[a, α, β, γ, δ,x], y[x], {x, 0, 1}, n1,
     Method -> {"PDEDiscretization" -> {"FiniteElement", {"MeshOptions"-> {"MaxCellMeasure" -> 0.0001}}}}];
```

) :

$$\textit{Algorithme}\quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a,\alpha,\beta,\gamma,\delta,z)$$

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\beta z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0 \qquad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z(z-1)(z-a)y''(z)+z(z-1)(z-a)\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\alpha\beta z\, y(z)=qy(z) \\ Sturm-Liouville \quad y'(0)=y'(1)=0 \quad |y(z)|<A \\ q_n \quad valeurs\ propres\ de\quad \mathbf{M} \\ n \quad croissant \rightarrow convergence\ suffisante\ des\ premières\ valeurs\ propres\ (tri\ croissant\ des\ valeurs) \\ c_{j,n} \quad coefficients\ des\ vecteurs\ propres\ de \quad \mathbf{M} \end{cases}$$

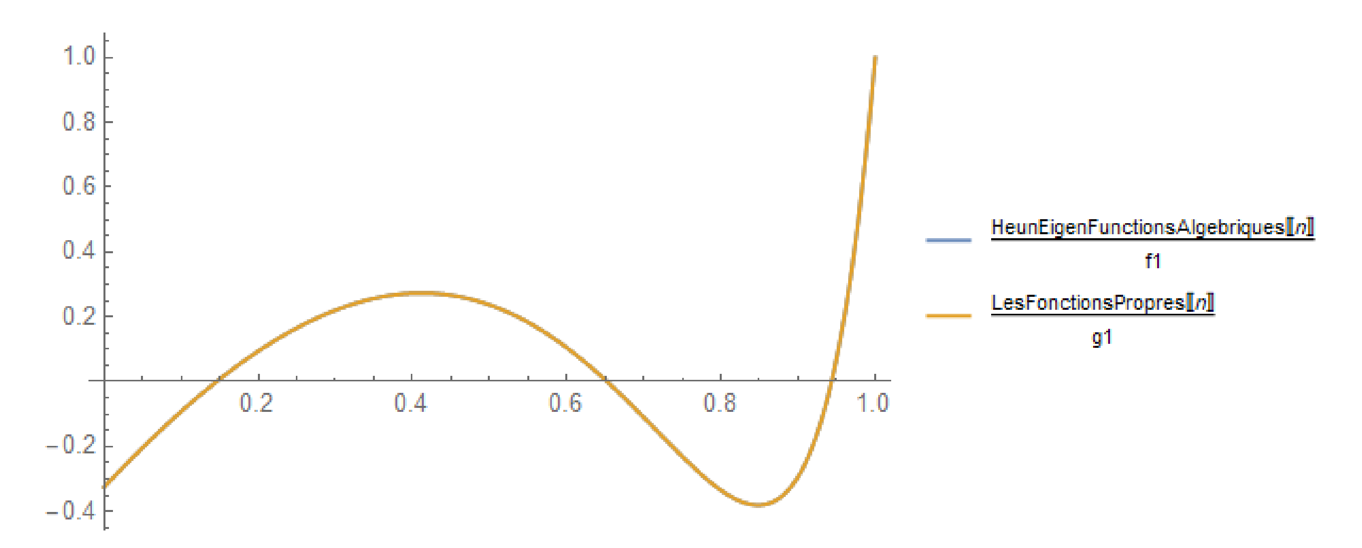
$$\Leftrightarrow R_j c_{j+1}-(Q_j+q)c_j+P_j c_{j-1}=0 \qquad Posons \qquad \mathbf{C}=[c_0,...,c_{j-1},c_j,c_{j+1},...]^t$$

$$et \quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} -Q_0 & R_0 & 0 & ... & ... & 0 & ...\ ... \\ P_1 & -Q_1 & R_1 & 0 & ... & 0 & ...\ ... \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & 0\ ... \\ ... & 0 & P_{j-1} & -Q_{j-1} & R_{j-1} & 0 & ...\ ... \\ ... & ... & 0 & P_j & -Q_j & R_j & 0\ ... \\ 0 & ... & ... & ... & P_{j+1} & -Q_{j+1} & R_{j+1}\ ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\ ... \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad (\mathbf{M}-q\mathbf{I}).\mathbf{C}=0$$

$$Avec \quad \begin{cases} R_j=a(j+1)(\gamma+j) \\ Q_j=j\{(j-1+\gamma)(a+1)+\varepsilon+a\delta\} \\ P_j=(j-1+\alpha)(j-1+\beta) \end{cases} \qquad Notation\ NIST\ modifiée \quad y_n(z)=HeunG_{[0,1]}(a,q_n,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z) \quad n=1,2,...,\infty$$

$$y_n(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}c_{j,n}z^j \qquad et \quad y_n'(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}j\,c_{j,n}z^{j-1} \qquad et \quad y_n''(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}j(j-1)\,c_{j,n}z^{j-2}$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 1/0.8; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 1; ε =α+β+1-γ-δ; la 4ème valeur propre :***



Et les deux jeux de valeurs propres obtenues numériquement et par la méthode matricielle :

{0.157896,-0.860301,-3.07963,-6.50981,-11.1508,-17.0025,-24.0649,-32.338,-41.8219,-52.5164,-64.4217,-77.5376,-91.8643,-107.402,-124.15,-142.108,-161.278,-181.658,-203.249,-226.051}
{0.157896,-0.860303,-3.07967,-6.51018,-11.1536,-17.0191,-24.1413,-32.6143,-42.618,-54.3972,-68.2073,-84.2813,-102.829,-124.051,-148.145,-175.314,-205.766,-239.72,-277.404,-319.053}

Remarque : il est clair que les dérivées premières de la fonction ne s'annulent pas aux bords de l'intervalle, donc ce n'est pas à proprement parler un problème de Neumann.

Pour résoudre un problème de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet ou Dirichlet-Neumann sur l'un des bords du domaine, il suffit d'appliquer les transformations F-Homotopique I,II ou III, ou leur combinaison pour prendre en compte une solution qui s'annule nécessairement à l'une des bornes de l'intervalle [0,1], avec la contrainte des paramètres γ, δ et ε étant des réels inférieurs à 1 . Cela veut concrètement dire que l'on va construire la matrice M avec des paramètres de Heun modifiés par la transformation F-Homotopique correspondante.

Si l'on travaille sur un intervalle quelconque [s1,s2] où s1, s2 est l'une quelconque des singularités parmi {0,1,a,∞}, alors il suffit (mais avec soin) de combiner également avec une transformation homographique de l'argument z. Toutes les combinaisons possibles de ces transformations sont remarquablement résumées dans la table 2 de l'article « The 192 Solutions of the Heun Equation » dans laquelle figure les expressions explicites des nouveaux paramètres de Heun.

Avec les *Notation NIST modifiée* $ht(\gamma,\delta,\varepsilon;z)HeunG_{[s_1,s_2]}(a,q_{h,n},\alpha_h,\beta_h,\gamma_h,\delta_h;h(z))\quad n=1,2,\ldots,\infty$,

Lorsque que l'on applique une transformation homographique à l'argument, tous les paramètres de Heun sont susceptibles d'être modifiés.

Pratiquement voyons ce que cela donne pour les divers types de problèmes aux limites que l'on peut rencontrer :

<u>Intervalle z€[0,1]</u> *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=0 et être analytique en z=1, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, \alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \delta, z)$$

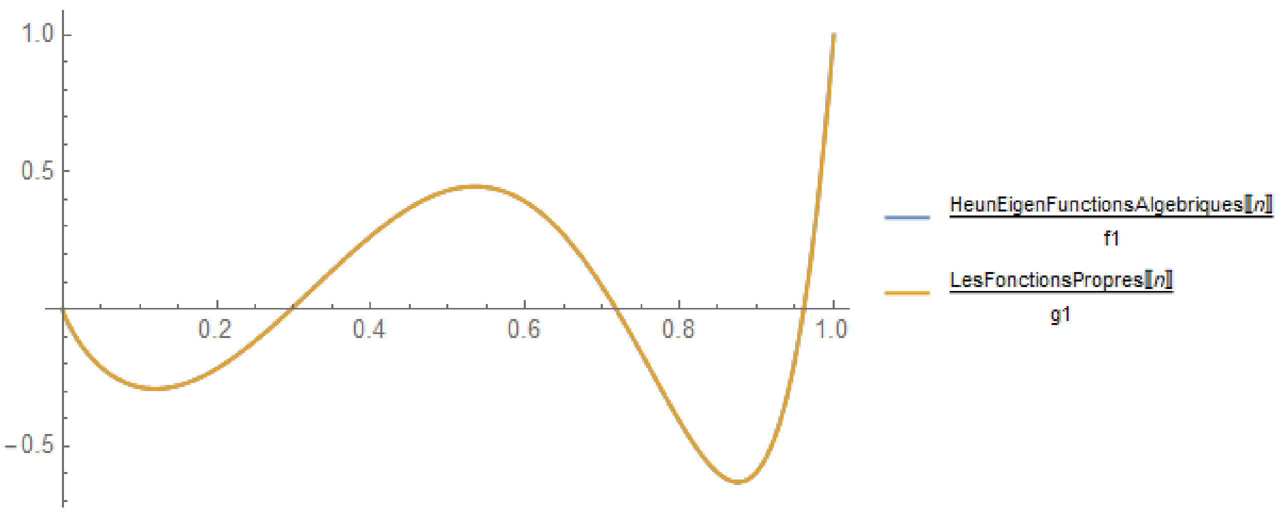
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ Valeur\ propre \quad \widetilde{q} = q-(a\delta+\varepsilon)(1-\gamma) = q-(a\delta+\alpha+\beta+1-\gamma-\delta)(1-\gamma) \\ \widetilde{y}(z) = z^{1-\gamma}y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\widetilde{y}_n(z) = z^{1-\gamma} y_n(z) \qquad \widetilde{y}'_n(z) = z^{1-\gamma} y_n'(z) + (1-\gamma) z^{-\gamma} y_n(z)$$

$$\widetilde{y}''_n(z) = z^{1-\gamma} y_n''(z) + 2(1-\gamma) z^{-\gamma} y_n'(z) - \gamma(1-\gamma) z^{-(1+\gamma)} y_n(z)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 1/0.6; α= 1/5; β = 1; γ= 1/6; δ = 2/3; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 4ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {-0.63782,-3.31564,-8.18189,-15.2139,-24.4103,-35.7707,-49.2951,-64.9835,-82.8359,-102.852,-125.032,-149.376,-175.885,-204.557,-235.394,-268.401,-303.592,-341.013,-380.786,-423.156,-468.513,-517.332,-570.071,-627.102,-688.719,-755.161,-826.648,-903.394,-985.62,-1073.56,-1167.45,-1267.54,-1374.1,-1487.42,-1607.78,-1735.49,-1870.88,-2014.27,-2166.03,-2326.53,-2496.15,-2675.32,-2864.46,-3064.03,-3274.53,-3496.45,-3730.34,-3976.78,-4236.37,-4509.78,-4797.69,-5100.86,-5420.07,-5756.18,-6110.12,-6482.88,-6875.55,-7289.29,-7725.39,-8185.25,-8670.41,-9182.57,-9723.62,-10295.7,-10901.1,-11542.6,-12223.1,-12946.3,-13716.1,-14537.3,-15415.6,-16357.9,-17372.5,-18470.1,-19664.2,-20973.3,-22422.9,-24051.2,-25920.7,-28150.1} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[0,1] : *Lorsque la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=1 et être analytique en z=0, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$\text{Algorithme} \quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, \alpha+1-\delta, \beta+1-\delta, \gamma, 2-\delta, z)$$

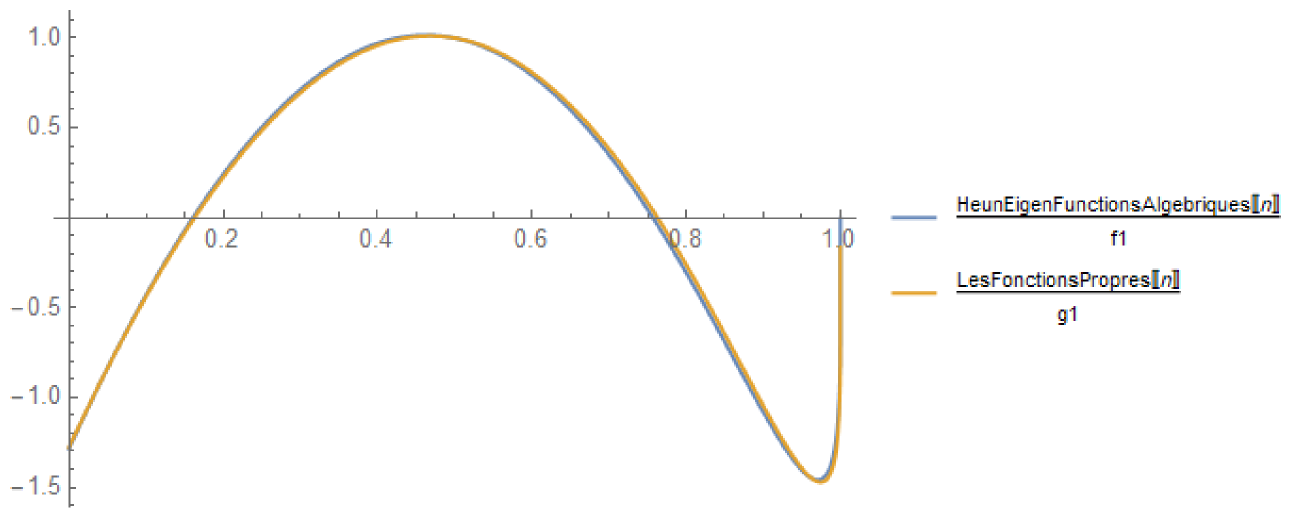
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ \text{Valeur propre} \quad \tilde{q} = q - a\gamma(1-\delta) \\ \tilde{y}(z) = (1-z)^{1-\delta} y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1) c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = (1-z)^{1-\delta} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = (1-z)^{1-\delta} y_n'(z) - (1-\delta)(1-z)^{-\delta} y_n(z)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = z^{1-\gamma} y_n''(z) - 2(1-\delta)(1-z)^{-\delta} y_n'(z) + \delta(1-\delta)(1-z)^{-\delta-1} y_n(z)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 1/0.3; α= 1/5; β =7/8; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 3ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {-0.224463,-5.36739,-16.1004,-32.4335,-54.3665,-81.8995,-115.032,-153.765,-198.098,-248.031,-303.564,-364.696,-431.429,-503.761,-581.694,-665.226,-754.358,-849.09,-949.423,-1055.35,-1166.89,-1284.02,-1406.75,-1535.08,-1669.01,-1808.55,-1953.68,-2104.41,-2260.74,-2422.67,-2590.2,-2763.34,-2942.07,-3126.43,-3316.46,-3512.36,-3714.61,-3924.27,-4143.06,-4373.11,-4616.4,-4874.45,-5148.27,-5438.6,-5746.07,-6071.29,-6414.92,-6777.67,-7160.36,-7563.83,-7989.05,-8437.04,-8908.92,-9405.9,-9929.31,-10480.6,-11061.3,-11673.1,-12317.8,-12997.6,-13714.6,-14471.4,-15270.7,-16115.6,-17009.6,-17956.5,-18960.9,-20027.8,-21163.3,-22374.4,-23669.3,-25058.1,-26553.2,-28170.,-29928.8,-31856.2,-33990.,-36386.3,-39136.9,-42416.1} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[0,1] *: Lorsque la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=0 et z=1, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, \alpha-\gamma-\delta+2, \beta-\gamma-\delta+2, 2-\gamma, 2-\delta, z)$$

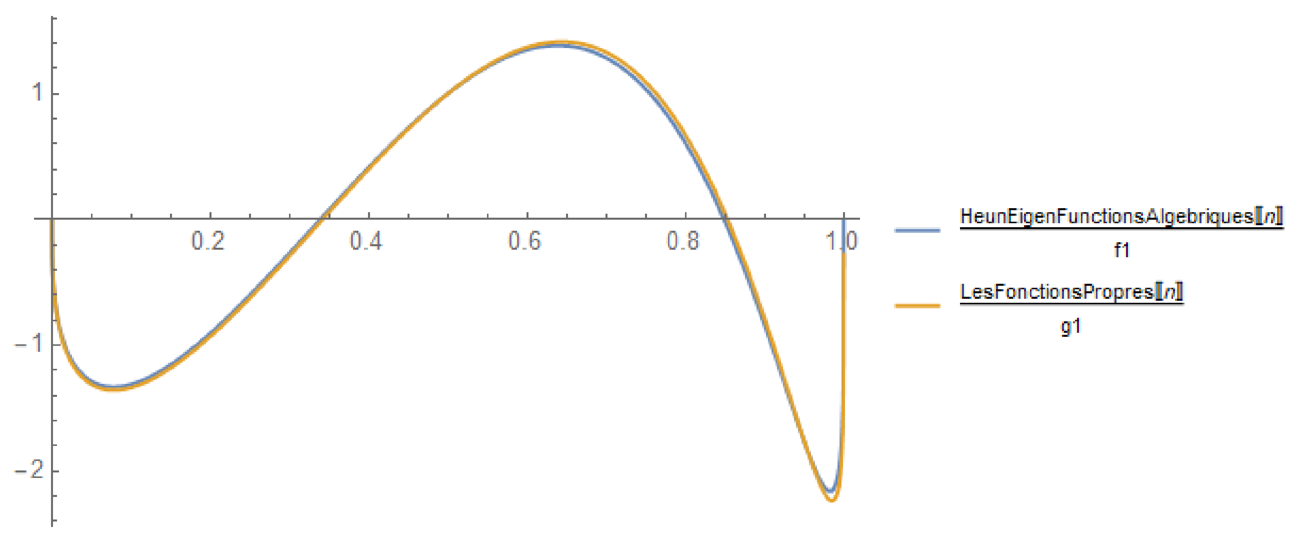
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = \varepsilon(\gamma-1)+a(\gamma+\delta-2)+q \\ \tilde{y}(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\, y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta} y_n'(z) + y_n(z)\frac{d}{dz}\left(z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta} y_n''(z) + 2y_n'(z)\frac{d}{dz}\left(z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\right) + y_n(z)\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 1/0.6; α= 1; β = 1/5; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 3ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {-0.45801,-3.15801,-8.02651,-15.0592,-24.2558,-35.6164,-49.1409,-64.8293,-82.6817,-102.698,-124.878,-149.222,-175.73,-204.402,-235.238,-268.238,-303.402,-340.73,-380.221,-421.878,-465.7,-511.697,-559.89,-610.343,-663.204,-718.749,-777.386,-839.592,-905.813,-976.401,-1051.62,-1131.66,-1216.71,-1306.92,-1402.46,-1503.5,-1610.21,-1722.79,-1841.43,-1966.32,-2097.7,-2235.77,-2380.77,-2532.95,-2692.54,-2859.81,-3035.04,-3218.49,-3410.47,-3611.29,-3821.24,-4040.68,-4269.94,-4509.38,-4759.39,-5020.34,-5292.67,-5576.78,-5873.15,-6182.24,-6504.55,-6840.61,-7190.97,-7556.22,-7936.97,-8333.88,-8747.63,-9178.96,-9628.66,-10097.5,-10586.5,-11096.5,-11628.6,-12183.8,-12763.3,-13368.5,-14000.6,-14661.3,-15352.1,-16074.8,-16831.4,-17624.2,-18455.5,-19328.,-20244.9,-21209.5,-22225.8,-23298.4,-24432.4,-25634.1,-26910.9,-28271.5,-29726.9,-31291.,-32981.5,-34822.3,-36847.,-39105.5,-41680.,-44726.6} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

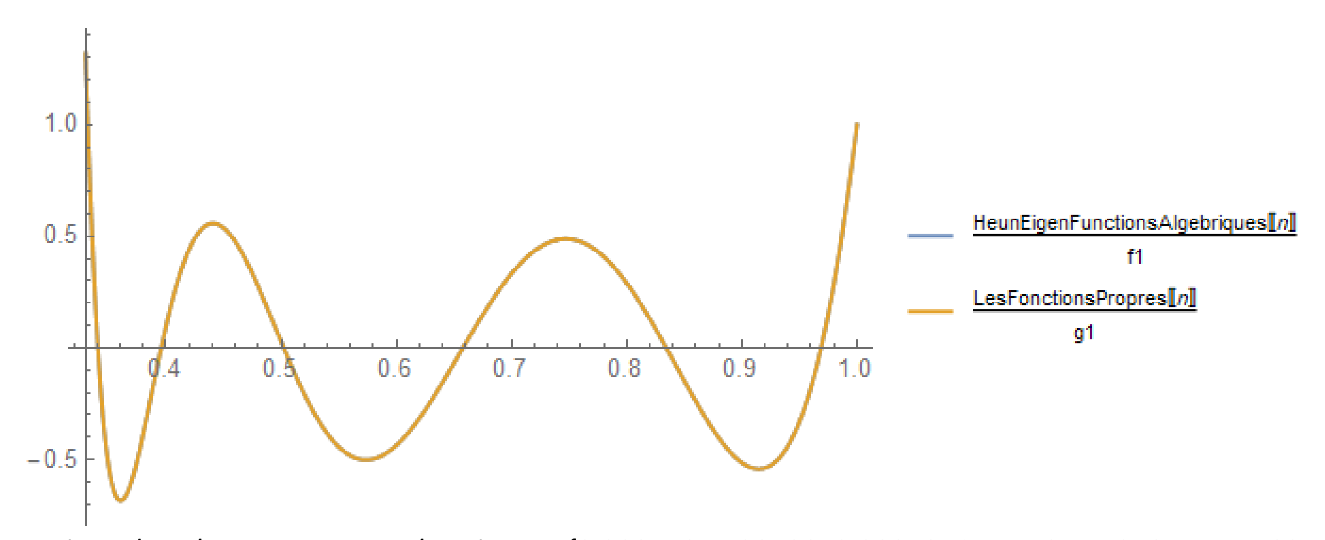
Intervalle z€[a,1] avec 0<a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit être analytique en z=a et z=1, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(1-a, \alpha, \beta, \delta, \gamma, 1-z)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = \alpha\ \beta - q \end{cases}$$

$$y_n(1-z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n}(1-z)^j \qquad y_n'(z) = -\sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n}(1-z)^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)c_{j,n}(1-z)^{j-2}$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.33; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 7ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.209512, 1.20428, 3.39242, 6.77412, 11.3494, 17.1183, 24.0819,32.245,41.6286,52.3002,64.4145,78.2232,94.0219,112.088,132.663,155.967,182.212,211.62,244.422,280.863,321.204,365.725,414.725,468.525,527.47,591.934,662.318,739.061,822.64,913.574,1012.44,1119.86,1236.54,1363.25,1500.87,1650.38,1812.9,1989.71,2182.3,2392.4,2622.07,2873.79,3150.61,3456.32,3795.84,4175.71,4605.02,5097.33,5674.65,6378.55,7314.37} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[a,1] avec 0<a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit être analytique en z=1 et s'annuler en z=a, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(1-a, -\alpha+\gamma+\delta, -\beta+\gamma+\delta, \delta, \gamma, 1-z)$$

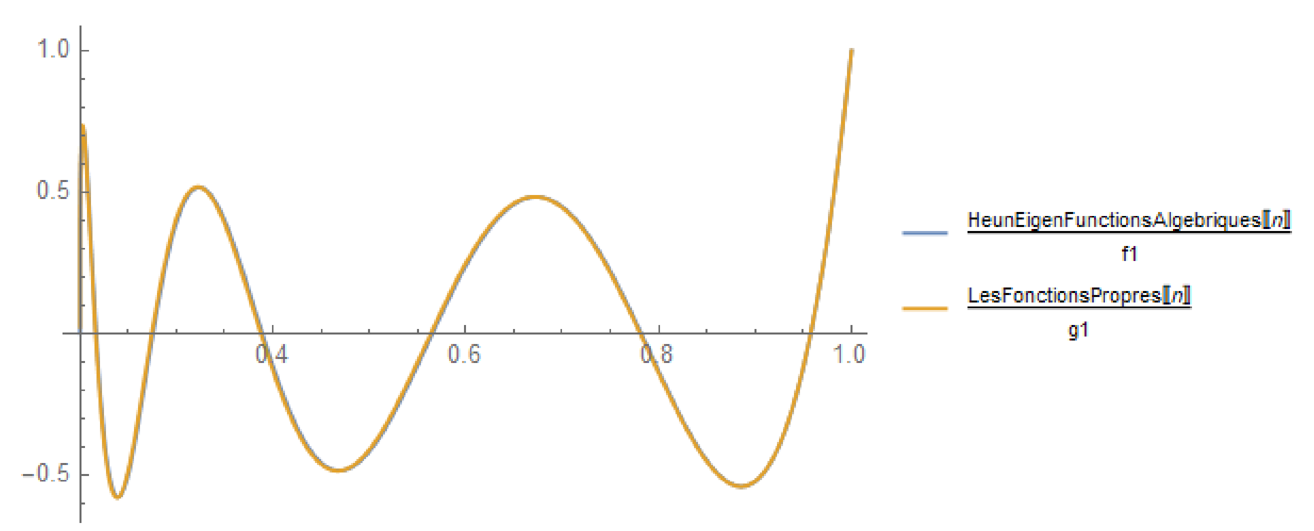
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = \alpha\beta + \delta(1-\varepsilon) - q \\ \tilde{y}(z) = (z-a)^{1-\varepsilon} y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n}(1-z)^j \qquad y_n'(z) = -\sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n}(1-z)^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n}(1-z)^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon} y_n'(z) + y_n(z)\frac{d}{dz}\left((z-a)^{1-\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon} y_n''(z) + 2y_n'(z)\frac{d}{dz}\left((z-a)^{1-\varepsilon}\right) + y_n(z)\frac{d^2}{dz^2}\left((z-a)^{1-\varepsilon}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.2; α= 1/3; β = 6/7; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 7ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.262529, 1.3044, 3.3107, 6.28555, 10.229, 15.1412, 21.0231,27.8788,35.7235,44.6012,54.6066,65.8915,78.6382,93.0224,109.195,127.287,147.417,169.702,194.257,221.202,250.658,282.751,317.611,355.372,396.174,440.159,487.478,538.284,592.737,651.006,713.261,779.683,850.46,925.786,1005.87,1090.91,1181.15,1276.8,1378.12,1485.36,1598.79,1718.7,1845.37,1979.12,2120.28,2269.21,2426.28,2591.87,2766.4,2950.32,3144.11,3348.28,3563.35,3789.94,4028.65,4280.17,4545.25,4824.67,5119.32,5430.14,5758.2,6104.65,6470.79,6858.04,7268.03,7702.58,8163.77,8653.98,9176.,9733.08,10329.1,10968.7,11657.6,12403.,13214.3,14104.,15089.4,16196.7,17468.4,18985.5,20954.4} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[a,1] avec 0<a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit être analytique en z=a et s'annuler en z=1, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(1-a, \alpha-\delta+1, \beta-\delta+1, 2-\delta, \gamma, 1-z)$$

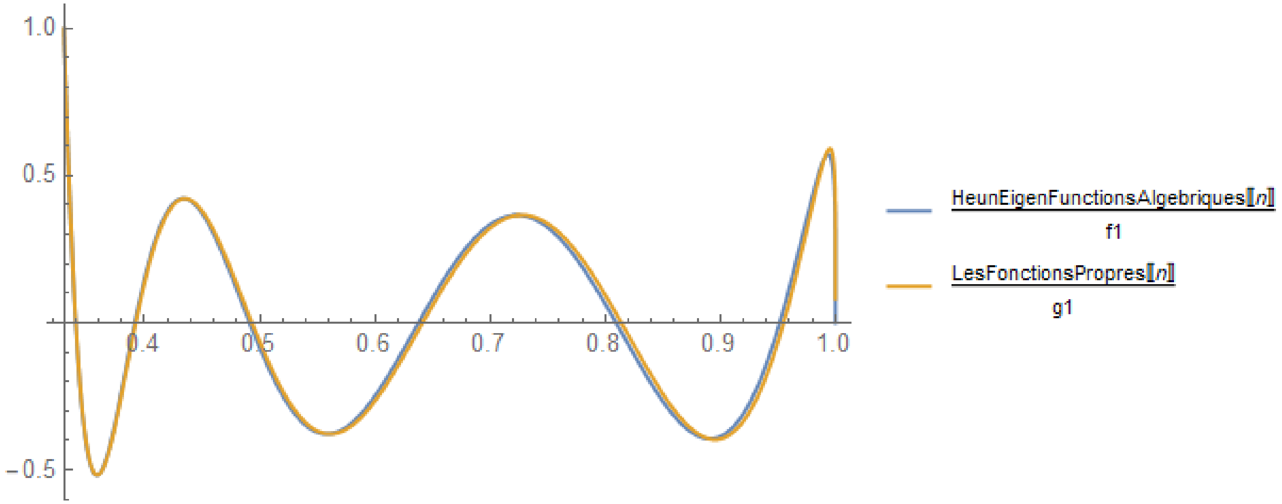
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = (\alpha-\delta+1)(\beta-\delta+1)+a\gamma(\delta-1)-q \\ \tilde{y}(z) = (1-z)^{1-\delta}\, y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n}(1-z)^j \qquad y_n'(z) = -\sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n}(1-z)^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n}(1-z)^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = (1-z)^{1-\delta}\, y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = (1-z)^{1-\delta}\, y_n'(z) + y_n(z)\frac{d}{dz}\left((1-z)^{1-\delta}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = (1-z)^{1-\delta}\, y_n''(z) + 2y_n'(z)\frac{d}{dz}\left((1-z)^{1-\delta}\right) + y_n(z)\frac{d^2}{dz^2}\left((1-z)^{1-\delta}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.33; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 7ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.297074, 1.48616, 3.87315, 7.45377, 12.228, 18.1959, 25.3587,33.7225,43.3124,54.2048,66.5681,80.6635,96.7866,115.21,136.17,159.884,186.565,216.434,249.724,286.679,327.562,372.655,422.256,476.688,536.297,601.459,672.577,750.09,834.476,926.26,1026.01,1134.37,1252.03,1379.78,1518.48,1669.14,1832.86,2010.94,2204.87,2416.39,2647.57,2900.89,3179.41,3486.96,3828.45,4210.44,4642.1,5137.,5717.26,6424.6,7364.82} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[a,1] avec 0<a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=1 et z=a, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$Algorithme \quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(1-a, -\alpha+\gamma+1, -\beta+\gamma+1, 2-\delta, \gamma, 1-z)$$

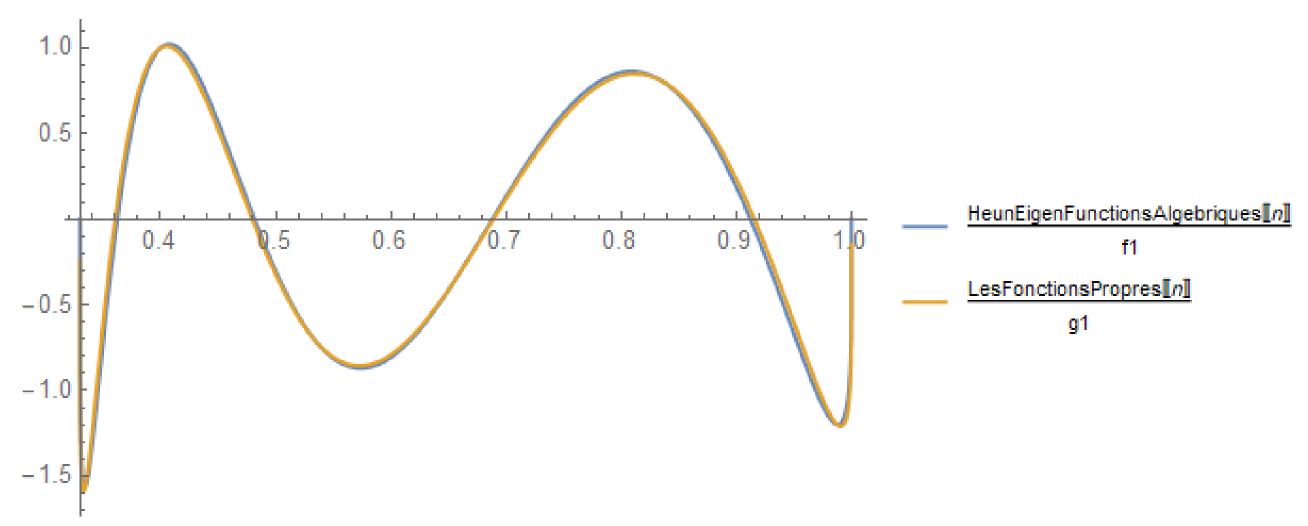
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = (\alpha-\gamma-1)(\beta-\gamma-1)+\gamma(\varepsilon-1)+a\gamma(\delta-1)-q \\ \tilde{y}(z) = (z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta}\, y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n}(1-z)^j \qquad y_n'(z) = -\sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n}(1-z)^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)c_{j,n}(1-z)^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta} y_n'(z) + y_n(z)\frac{d}{dz}\left((z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = (z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta} y_n''(z) + 2y_n'(z)\frac{d}{dz}\left((z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta}\right) + y_n(z)\frac{d^2}{dz^2}\left((z-a)^{1-\varepsilon}(1-z)^{1-\delta}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.33; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 5/6; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 5ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.408648, 1.80104, 4.38704, 8.16658, 13.1397, 19.3065, 26.6681,35.23,45.0161,56.1008,68.6514,82.932,99.2446,117.867,139.039,162.979,189.901,220.026,253.585,290.825,332.008,377.416,427.349,482.129,542.103,607.647,679.166,757.099,841.926,934.171,1034.41,1143.27,1261.46,1389.77,1529.06,1680.33,1844.7,2023.46,2218.11,2430.38,2662.36,2916.54,3195.97,3504.49,3847.03,4230.16,4663.05,5159.32,5741.13,6450.3,7392.84} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[1,a] avec a>1 *: alors les 4 implémentations de l'algorithme s'obtiennent en substituant à chaque les expressions (z-a) et (1-z) en (a-z) et (z-1).*

Les 4 dernières implémentations que je vais traiter sont celles sur un intervalle [0,a] :

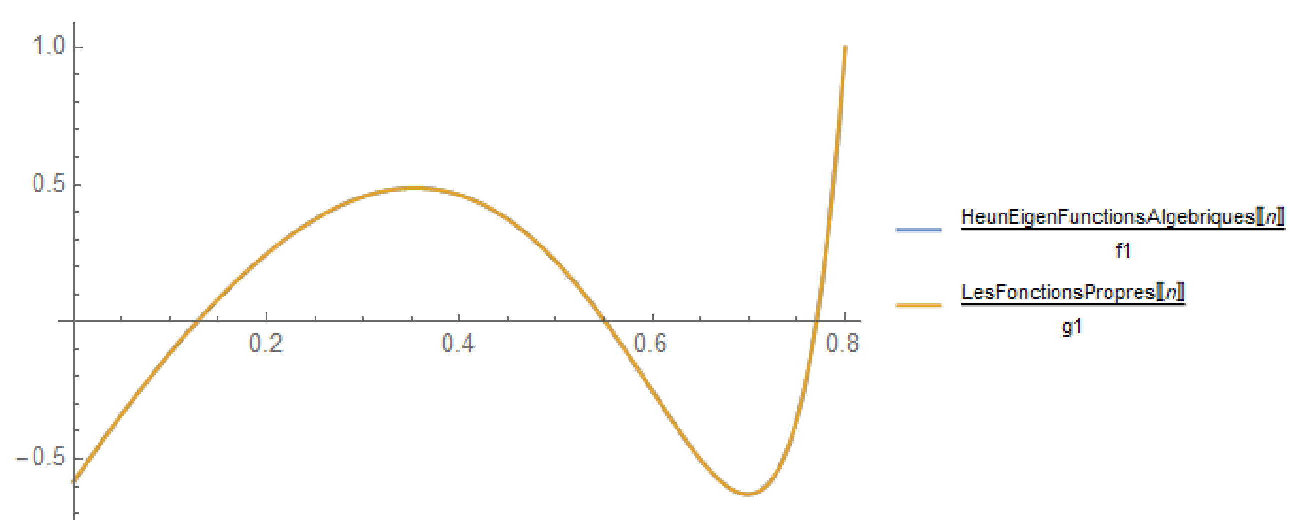
Intervalle z€[0,a] avec a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit être analytique en z=0 et z=a, alors on applique l'algorithme sans substitution de paramètres :*

$$Algorithme \quad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, \alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta \\ Valeur\ propre \quad q \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n} z^{j-2}$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.8; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 1; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 4ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.144416,-0.503998,-2.1172,-4.7005,-8.25546,-12.7931,-18.3502,-25.0148,-32.9382,-42.3108,-53.3247,-66.1561,-80.9678,-97.9176,-117.164,-138.868,-163.198,-190.329,-220.442,-253.727} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[0,a] avec a<1 *: Prenons le cas où la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=0 et être analytique en z=a, alors on applique les mêmes substitutions de paramètres que pour l'intervalle [0,1] avec les mêmes conditions limites soit :*

$$Algorithme \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, \alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \delta, z)$$

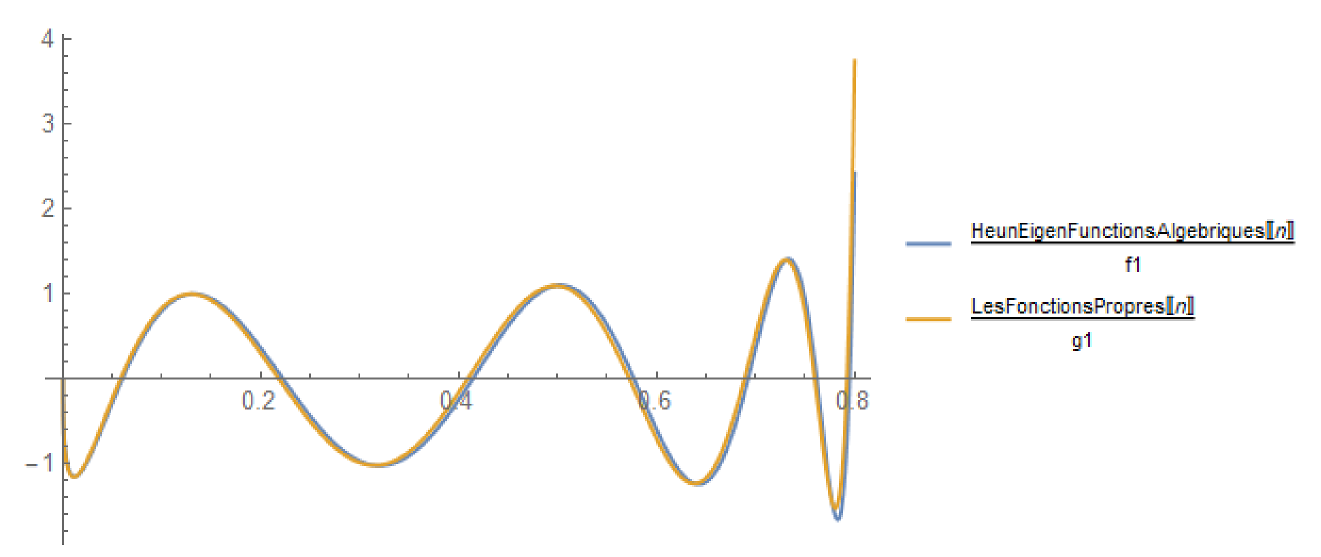
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta \\ Valeur\ propre \quad \tilde{q} = q - (a\delta + \varepsilon)(1 - \gamma) = q - (a\delta + \alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta)(1 - \gamma) \\ \tilde{y}(z) = z^{1-\gamma} y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1)\, c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = z^{1-\gamma} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = z^{1-\gamma} y_n'(z) + (1-\gamma) z^{-\gamma} y_n(z)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = z^{1-\gamma} y_n''(z) + 2(1-\gamma) z^{-\gamma} y_n'(z) - \gamma(1-\gamma) z^{-(1+\gamma)} y_n(z)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.8; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 1; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 8ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.0219058,-0.934107,-2.87055,-5.77719,-9.65732,-14.5272,-20.4357,-27.4895,-35.8547,-45.7249,-57.2876,-70.7139,-86.1634,-103.793,-123.76,-146.227,-171.363,-199.342,-230.348,-264.572,-302.213,-343.481,-388.598,-437.795,-491.316,-549.421,-612.382,-680.488,-754.047,-833.386,-918.854,-1010.82,-1109.69,-1215.88,-1329.86,-1452.13,-1583.21,-1723.7,-1874.23,-2035.5,-2208.27,-2393.39,-2591.78,-2804.5,-3032.7,-3277.72,-3541.04,-3824.4,-4129.8,-4459.56,-4816.46,-5203.85,-5625.84,-6087.57,-6595.69,-7159.07,-7790.09,-8507.17,-9340.37,-10346.5} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[0,a] avec a<1 *: Lorsque la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=a et être analytique en z=0, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$\text{Algorithme} \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, -\alpha+\gamma+\delta, -\beta+\gamma+\delta, \gamma, \delta, z)$$

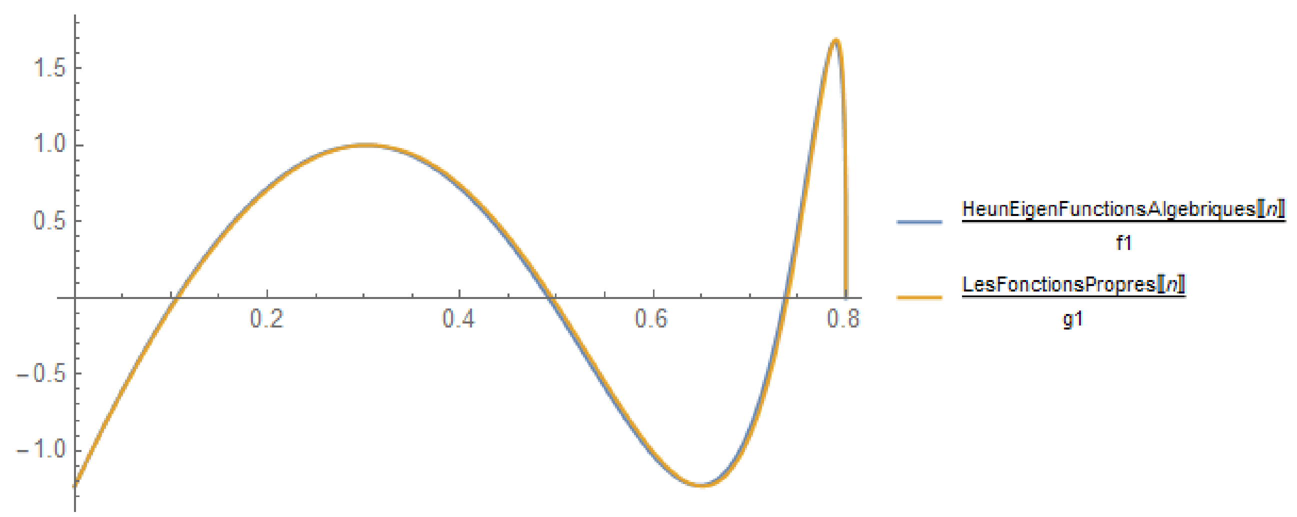
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ \text{Valeur propre} \quad \tilde{q} = q - \gamma(1-\varepsilon) \\ \tilde{y}(z) = (a-z)^{1-\varepsilon} y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1) c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = (a-z)^{1-\varepsilon} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = (a-z)^{1-\varepsilon} y_n'(z) + y_n(z) \frac{d}{dz}\left((a-z)^{1-\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = (a-z)^{1-\varepsilon} y_n''(z) + 2 y_n'(z) \frac{d}{dz}\left((a-z)^{1-\varepsilon}\right) + y_n(z) \frac{d^2}{dz^2}\left((a-z)^{1-\varepsilon}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.8; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 1; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 4ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {0.050468,-0.933045,-2.87042,-5.77642,-9.65322,-14.5099,-20.3793,-27.3459,-35.5629,-45.2299,-56.5493,-69.704,-84.86,-102.176,-121.81,-143.926,-168.689,-196.276,-226.867,-260.655} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Intervalle z€[0,a] avec a<1 *: Lorsque la fonction bi-analytique doit s'annuler en z=0 et z=a, alors on applique l'algorithme avec les substitutions suivantes de paramètres :*

$$\textit{Algorithme} \qquad (q, y(z)) = HeunBiAnalytique(a, -\alpha+\delta+1, -\beta+\delta+1, 2-\gamma, \delta, z)$$

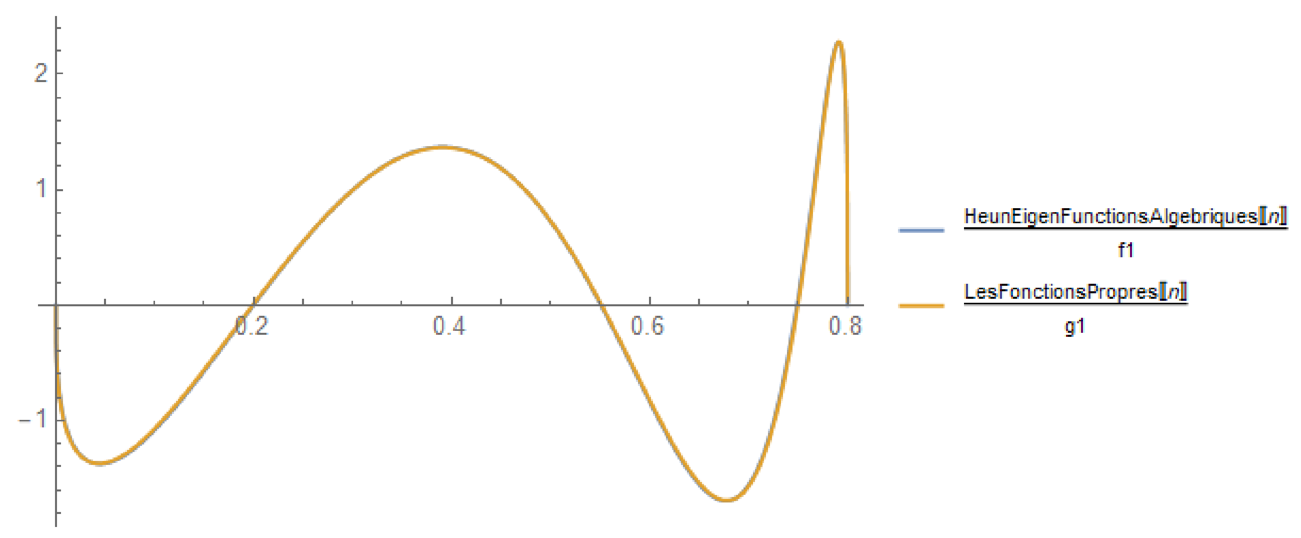
$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta \\ \textit{Valeur propre} \quad \tilde{q} = \varepsilon+\gamma-2+a\delta(\gamma-1)+q \\ \tilde{y}(z) = z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon}\, y(z) \end{cases}$$

$$y_n(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_{j,n} z^j \qquad y_n'(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j\, c_{j,n} z^{j-1} \qquad y_n''(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} j(j-1) c_{j,n} z^{j-2}$$

$$\tilde{y}_n(z) = z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon} y_n(z) \qquad \tilde{y}'_n(z) = z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon} y_n'(z) + y_n(z)\frac{d}{dz}\left(z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{y}''_n(z) = z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon} y_n''(z) + 2y_n'(z)\frac{d}{dz}\left(z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon}\right) + y_n(z)\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{1-\gamma}(a-z)^{1-\varepsilon}\right)$$

Pour la résolution numérique avec Mathematica et sa comparaison avec la construction matricielle, voici un exemple de graphe obtenue pour la fonction de Heun avec les paramètres suivants : ***a = 0.8; α= 1/3; β = 1; γ= 2/3; δ = 1; ε =α+β+1-γ-δ; avec la 4ème valeur propre :***



Le jeux de valeurs propres est le suivant : {-0.178936,-1.47145,-3.73139,-6.96056,-11.162,-16.3494,-22.5675,-29.9202,-38.578,-48.7446,-60.6172,-74.3722,-90.1717,-108.173,-128.534,-151.418,-176.992,-205.433,-236.923,-271.654} et la construction par le développement de type Fröbenius respecte sur tout l'intervalle l'équation différentielle de Heun.

Solutions polynomiales analytiques aux trois points singuliers z=0 z=1 et z=a, récurrence finie du développement, valeurs propres matricielles

L'étape suivante des solutions de l'équation est celle pour laquelle la matrice M est de dimension finie, car les termes de la récurrence s'annulent au delà d'un certain nombre n. Dès lors on construit nécessairement une solution polynomiale de degré n pour laquelle il y a exactement n valeurs propres $q_{n,m}$ de la matrice M_n. Pour que la récurrence soit finie une condition supplémentaire sur un des deux paramètres $\widetilde{\alpha}$ ou $\widetilde{\beta}$ qui doit être un entier négatif. Cela donne un schéma de construction de la matrice à diagonaliser suivant :

$$\begin{cases} R_j = a(j+1)(\gamma+j) \\ Q_j = j\{(j-1+\gamma)(a+1)+\varepsilon+a\delta\} \\ P_j = (j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ Q_0 = 0 \qquad R_0 = a\gamma \end{cases} \qquad \alpha=-n \qquad ou \qquad \beta=-n \qquad \begin{cases} c_{-1}=0 \quad c_0=1 \\ R_j c_{j+1} - (Q_j+q)c_j + P_j c_{j-1} = 0 \\ P_{n+1}=0 \Rightarrow c_{n+1}=0 \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_n = [c_0,\ldots,c_{n-1},c_n]^t \quad \mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} -Q_0 & R_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ P_1 & -Q_1 & R_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & 0 & P_{n-3} & -Q_{n-3} & R_{n-3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & P_{n-2} & -Q_{n-2} & R_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & P_{n-1} & -Q_{n-1} & R_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & P_n & -Q_n \end{bmatrix} \quad (\mathbf{M}_n - q\mathbf{I}_n).\mathbf{C}_n = 0$$

$$q^0_{n,m} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_n(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta) \Rightarrow P^0_{n,m}(z) = \sum_{j=0}^{j=n} c_{j,n,m}(q^0_{n,m})z^j \quad m \in \{0,1,2,..,n\}$$

$$Notation \quad valeurs\ propres \quad Vp(\mathbf{M}_n(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta)) \quad et \quad P^0_{n,m}(z) = HeunG_l(a,q^0_{n,m},\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$$

Compte tenu des huit transformations F-Homotopiques laissant invariante l'équation de Heun, on peut construire huit solutions apparentées « polynomiales », comme suit.

Commençons par la première transformation F-Homotopique H1 avec le schéma de construction suivant :

$$H_1 \quad \begin{cases} q = q_I - (a\delta+\varepsilon)(1-\gamma) \\ \alpha_I = \alpha+1-\gamma \qquad \beta_I = \beta+1-\gamma \quad contrainte \quad \alpha_I = -n = \alpha+1-\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma-1-n \\ \gamma_I = 2-\gamma \qquad \delta_I = \delta \qquad \varepsilon_I = \varepsilon \end{cases} .$$

$$P^I_{n,m}(z) = z^{1-\gamma}\widetilde{P}^I_{n,m}(z) \Rightarrow q^I_{n,m} \in Vp(\mathbf{M}_n(a;\alpha_I=-n,\beta_I,\gamma_I,\delta_I)) \quad et \quad \widetilde{P}^I_{n,m}(z) = HeunG_l(a,q^I_{n,m},\alpha_I,\beta_I,\gamma_I,\delta_I;z)$$

La deuxième transformation F-Homotopique H2 donne le schéma de construction suivant :

$$H_2 \quad \begin{cases} q = q_{II} - a\gamma(1-\delta) \\ \alpha_{II} = \alpha+1-\delta \qquad \beta_{II} = \beta+1-\delta \quad contrainte \quad \alpha_{II} = -n = \alpha+1-\delta \Rightarrow \alpha = \delta-1-n \\ \gamma_{II} = \gamma \qquad \delta_{II} = 2-\delta \qquad \varepsilon_{II} = \varepsilon \end{cases} .$$

$$P^{II}_{n,m}(z) = (1-z)^{1-\gamma}\widetilde{P}^{II}_{n,m}(z) \Rightarrow q^{II}_{n,m} \in Vp(\mathbf{M}_n(a;\alpha_{II}=-n,\beta_{II},\gamma_{II},\delta_{II})) \quad et \quad \widetilde{P}^{II}_{n,m}(z) = HeunG_l(a,q_{II},\alpha_{II},\beta_{II},\gamma_{II},\delta_{II};z)$$

La troisième transformation F-Homotopique H3 donne le schéma de construction suivant :

$$H_3 \quad \begin{cases} q_{III} = q + \gamma(1-\varepsilon) \\ \alpha_{III} = \alpha + 1 - \varepsilon \qquad \beta_{III} = \beta + 1 - \varepsilon \qquad contrainte \quad \alpha_{III} = -n = \alpha + 1 - \varepsilon \Rightarrow \alpha = \varepsilon - 1 - n \\ \gamma_{III} = \gamma \qquad \delta_{III} = \delta \qquad \varepsilon_{III} = 2 - \varepsilon \end{cases}$$

$$Et \quad \alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \varepsilon \Rightarrow \delta = \alpha + \beta + 1 - \gamma - \varepsilon = \beta - n - \gamma$$

$$P_{n,m}^{III}(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon} \widetilde{P}_{n,m}^{III}(z) \Rightarrow q_{n,m}^{III} \in Vp\left(\mathbf{M}_n\left(a; \alpha_{III} = -n, \beta_{III}, \gamma_{III}, \delta_{III}\right)\right) \quad et \quad \widetilde{P}_{n,m}^{III}(z) = HeunG_l\left(a, q_{III}; \alpha_{III}, \beta_{III}, \gamma_{III}, \delta_{III}; z\right)$$

Les 4 autres transformations donnent les constructions suivantes de solutions assimilées polynomiales :

$$H_{1,2} \quad \begin{cases} q_{I,II} = q + \varepsilon(1-\gamma) - a(\gamma + \delta - 2) \\ \alpha_{I,II} = \alpha + 2 - \gamma - \delta \qquad \beta_{I,II} = \beta + 2 - \gamma - \delta \quad contrainte \quad \alpha_{I,II} = -n = \alpha + 2 - \gamma - \delta \Rightarrow \alpha = \gamma + \delta - 2 - n \\ \gamma_{I,II} = 2 - \gamma \qquad \delta_{I,II} = 2 - \delta \qquad \varepsilon_{I,II} = \varepsilon \end{cases}$$

$$P_{n,m}^{I,II}(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta} \widetilde{P}_{n,m}^{I,II}(z) \Rightarrow q_{n,m}^{I,II} \in Vp\left(\mathbf{M}_n\left(a_{III}; \alpha_{I,II} = -n, \beta_{I,II}, \gamma_{I,II}, \delta_{I,II}\right)\right) \quad et \quad \widetilde{P}_{n,m}^{I,II}(z) = HeunG_l\left(a, q_{I,II}; \alpha_{I,II}, \beta_{I,II}, \gamma_{I,II}, \delta_{I,II}; z\right)$$

$$H_{1,3} \quad \begin{cases} q_{I,III} = q + 1 - \varepsilon + (1-\gamma)(1 + a\delta) \\ \alpha_{I,III} = \alpha + 2 - \gamma - \varepsilon \qquad \beta_{I,III} = \beta + 2 - \gamma - \varepsilon \quad contrainte \quad \alpha_{I,III} = -n = \alpha + 2 - \gamma - \varepsilon \Rightarrow \alpha = \gamma + \varepsilon - 2 - n \\ \gamma_{I,III} = 2 - \gamma \qquad \delta_{I,III} = \delta \qquad \varepsilon_{I,III} = 2 - \varepsilon \end{cases}$$

$$P_{n,m}^{I,III}(z) = z^{1-\gamma}\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon} \widetilde{P}_{n,m}^{I,III}(z) \Rightarrow q_{n,m}^{I,III} \in Vp\left(\mathbf{M}_n\left(a; \alpha_{I,III} = -n, \beta_{I,III}, \gamma_{I,III}, \delta_{I,III}\right)\right) \quad et \quad \widetilde{P}_{n,m}^{I,III}(z) = HeunG_l\left(a, q_{I,III}; \alpha_{I,III}, \beta_{I,III}, \gamma_{I,III}, \delta_{I,III}; z\right)$$

$$H_{2,3} \quad \begin{cases} q_{II,III} = q + \gamma(1 - \varepsilon + a(1-\delta)) \\ \alpha_{II,III} = \alpha + 2 - \delta - \varepsilon \qquad \beta_{II,III} = \beta + 2 - \delta - \varepsilon \quad contrainte \quad \alpha_{II,III} = -n = \alpha + 2 - \delta - \varepsilon \Rightarrow \alpha = \delta + \varepsilon - 2 - n \\ \gamma_{II,III} = \gamma \qquad \delta_{II,III} = 2 - \delta \qquad \varepsilon_{II,III} = 2 - \varepsilon \end{cases}$$

$$P_{n,m}^{II,III} = (1-z)^{1-\delta}\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon} \widetilde{P}_{n,m}^{II,III}(z) \Rightarrow q_{n,m}^{II,III} \in Vp\left(\mathbf{M}_n\left(a; \alpha_{I,III} = -n, \beta_{I,III}, \gamma_{I,III}, \delta_{I,III}\right)\right) \quad et \quad \widetilde{P}_{n,m}^{II,III}(z) = HeunG_l\left(a, q_{II,III}, \alpha_{II,III}, \beta_{II,III}, \gamma_{II,III}, \delta_{II,III}; z\right)$$

$$H_{1,2,3} \quad \begin{cases} q_{I,II,III} = q + 2 - \gamma - \varepsilon - a(\gamma + \delta - 2) \\ \alpha_{I,II,III} = \alpha + 3 - \gamma - \delta - \varepsilon = 2 - \beta \\ \beta_{I,II,III} = \beta + 3 - \gamma - \delta - \varepsilon = 2 - \alpha \\ \alpha = \gamma + \delta + \varepsilon - \beta - 1 = \gamma + \delta + \varepsilon - n - 3 \\ \Rightarrow \beta_{I,II,III} = 2 - \alpha = n + 5 - \gamma - \delta - \varepsilon \\ \gamma_{I,II,III} = 2 - \gamma \qquad \delta_{I,II,III} = 2 - \delta \qquad \varepsilon_{I,II,III} = 2 - \varepsilon \end{cases} \qquad contrainte \quad \alpha_{I,II,III} = -n = 2 - \beta = -n \Rightarrow \beta = n + 2$$

$$P_{n,m}^{I,II,III}(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{1-\delta}\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{1-\varepsilon} \widetilde{P}_{n,m}^{I,II,III}(z) \Rightarrow q_{n,m}^{I,II,III} \in Vp\left(\mathbf{M}_n\left(a; \alpha_{I,II,III} = -n, \beta_{I,II,III}, \gamma_{I,II,III}, \delta_{I,II,III}\right)\right) \quad et \quad \widetilde{P}_{n,m}^{I,II,III}(z) = HeunG_l\left(a, q_{I,II,III}; \alpha_{I,II,III}, \beta_{I,II,III}, \gamma_{I,II,III}, \delta_{I,II,III}; z\right)$$

Voici quelques exemples de polynômes de degré 1 :

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{0}=-\dfrac{1}{2}\left\{\beta-\delta+a(\gamma+\delta)+\sqrt{(\beta-\delta+a(\gamma+\delta))^{2}-4a\beta\gamma}\right\} \\ q_{1,1}^{0}=-\dfrac{1}{2}\left\{\beta-\delta+a(\gamma+\delta)-\sqrt{(\beta-\delta+a(\gamma+\delta))^{2}-4a\beta\gamma}\right\}. \\ P_{1,0}^{0}(x)=1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,0}^{0}\qquad P_{1,1}^{0}(x)=1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,1}^{0} \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{I}=\dfrac{1}{2}\left\{\gamma+\delta+a(\gamma-\delta)-\beta-1-2a-\sqrt{4a(1+\beta-\gamma)(\gamma-2)+(\gamma+\delta-1-\beta+a(\gamma-2-\delta))^{2}}\right\} \\ q_{1,1}^{I}=\dfrac{1}{2}\left\{\gamma+\delta+a(\gamma-\delta)-\beta-1-2a+\sqrt{4a(1+\beta-\gamma)(\gamma-2)+(\gamma+\delta-1-\beta+a(\gamma-2-\delta))^{2}\gamma}\right\} \\ P_{1,0}^{I}(x)=x^{1-\gamma}\left(1-\dfrac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,0}^{I}\right)\qquad P_{1,1}^{I}(x)=x^{1-\gamma}\left(1-\dfrac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,1}^{I}\right) \\ q_{0}=q_{1,0}^{I}-(a\delta+\beta-\gamma-\delta)\quad q_{1}=q_{1,1}^{I}-(a\delta+\beta-\gamma-\delta) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{II}=\dfrac{1}{2}\left\{a(\delta-\gamma)+1-\beta-2a-\sqrt{(\beta-1+a(2+\gamma-\delta))^{2}-4a\gamma(1+\beta-\delta)}\right\} \\ q_{1,1}^{II}=\dfrac{1}{2}\left\{a(\delta-\gamma)+1-\beta-2a+\sqrt{(\beta-1+a(2+\gamma-\delta))^{2}-4a\gamma(1+\beta-\delta)}\right\} \\ P_{1,0}^{II}(x)=(1-x)^{1-\delta}\left(1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,0}^{II}\right)\qquad P_{1,1}^{II}(x)=(1-x)^{1-\delta}\left(1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,1}^{II}\right) \\ q_{0}=q_{1,0}^{II}-a\gamma(1-\delta)\quad q_{1}=q_{1,1}^{II}-a\gamma(1-\delta) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} \alpha=\varepsilon-2\quad\delta=\alpha+\beta+1-\gamma-\varepsilon \\ q_{1,0}^{III}=\dfrac{1}{2}\left\{a(1-\beta)+\varepsilon-\gamma-2-\sqrt{(2-a(1-\beta)+\gamma-\varepsilon)^{2}-4a\gamma(1+\beta-\varepsilon)}\right\} \\ q_{1,1}^{III}=\dfrac{1}{2}\left\{a(1-\beta)+\varepsilon-\gamma-2+\sqrt{(2-a(1-\beta)+\gamma-\varepsilon)^{2}-4a\gamma(1+\beta-\varepsilon)}\right\} \\ P_{1,0}^{III}(x)=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,0}^{III}\right)\qquad P_{1,1}^{III}(x)=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1+\dfrac{x}{a\gamma}q_{1,1}^{III}\right) \\ q_{0}=q_{1,0}^{III}-\gamma(1-\varepsilon)\quad q_{1}=q_{1,1}^{III}-\gamma(1-\varepsilon) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{I,II}=\frac{1}{2}\left\{a(\gamma+\delta-4)+\gamma-\beta-\sqrt{(\gamma-\beta+a(\gamma+\delta-4))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\delta-2-\beta)}\right\}\\ q_{1,1}^{I,II}=\frac{1}{2}\left\{a(\gamma+\delta-4)+\gamma-\tilde{\beta}+\sqrt{(\gamma-\beta+a(\gamma+\delta-4))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\delta-2-\beta)}\right\}\\ P_{1,0}^{I,II}(x)=x^{1-\gamma}(1\text{-x})^{1-\delta}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,0}^{I,II}\right)\qquad P_{1,1}^{I,II}(x)=x^{1-\gamma}(1\text{-x})^{1-\delta}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,1}^{I,II}\right)\\ q_0=q_{1,0}^{I,II}-\varepsilon(1-\gamma)-a(\gamma+\delta-2)\quad q_1=q_{1,1}^{I,II}-\varepsilon(1-\gamma)-a(\gamma+\delta-2) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{I,III}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma-\beta)-\sqrt{(\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma-\beta))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon-2-\beta)}\right\}\\ q_{1,1}^{I,III}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma-\beta)+\sqrt{(\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma-\beta))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon-2-\beta)}\right\}\\ P_{1,0}^{I,III}(x)=x^{1-\gamma}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,0}^{I,III}\right)\qquad P_{1,1}^{I,III}(x)=x^{1-\gamma}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,1}^{I,III}\right)\\ q_0=q_{1,0}^{I,III}-(1-\varepsilon)-(1-\gamma)(1+a\delta)\quad q_1=q_{1,1}^{I,III}-(1-\varepsilon)-(1-\gamma)(1+a\delta) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{II,III}=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon-\beta+a(\delta-\beta)-\sqrt{(\beta-\varepsilon+a(\beta-\delta))^2-4a(\beta-2)(\beta-\varepsilon+2-\delta)}\right\}\\ q_{1,1}^{II,III}=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon-\beta+a(\delta-\beta)+\sqrt{(\beta-\varepsilon+a(\beta-\delta))^2-4a(\beta-2)(\beta-\varepsilon+2-\delta)}\right\}\\ P_{1,0}^{II,III}(x)=(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1+\frac{x}{a(\beta-2)}q_{1,0}^{II,III}\right)\qquad P_{1,1}^{II,III}(x)=(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1+\frac{x}{a(\beta-2)}q_{1,1}^{II,III}\right)\\ q_0=q_{1,0}^{II,III}-\gamma(1-\varepsilon+a(1-\delta))\quad q_1=q_{1,1}^{II,III}-\gamma(1-\varepsilon+a(1-\delta)) \end{cases}$$

$$n=1\quad\begin{cases} q_{1,0}^{I,II,III}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma+\delta-4)-\sqrt{(\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma+\delta-4))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\delta+\varepsilon-6)}\right\}\\ q_{1,1}^{I,II,III}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma+\delta-4)+\sqrt{(\gamma+\varepsilon-4+a(\gamma+\delta-4))^2-4a(\gamma-2)(\gamma+\delta+\varepsilon-6)}\right\}\\ P_{1,0}^{I,II,III}(x)=x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,0}^{I,II,III}\right)\qquad P_{1,1}^{I,II,III}(x)=x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{\text{x}}{a}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-\frac{x}{a(\gamma-2)}q_{1,1}^{I,II,III}\right)\\ q_0=q_{1,0}^{I,II,III}+a(\gamma+\delta-2)+\gamma+\varepsilon-2\qquad q_1=q_{1,1}^{I,II,III}+a(\gamma+\delta-2)+\gamma+\varepsilon-2 \end{cases}$$

Notation équivalente des polynômes de Heun selon Ronveaux

Voici un tableau des notations équivalentes que l'on peut retrouver dans la littérature et dans ce document :

Classes Ronveaux	Classes du document courant	Terme de F-Homotopie 1	Terme de F-Homotopie 2	Terme de F-Homotopie 3	$\tilde{\tilde{\alpha}}$	$\tilde{\tilde{\beta}}$	γ	δ	ε
I	0	1	1	1	-n	β	γ	δ	ε
II	I	$x^{1-\gamma}$	1	1	1+α-γ=-n	1+β-γ	2-γ	δ	ε
III	II	1	$(1-x)^{1-\delta}$	1	1+α-δ=-n	1+β-δ	γ	2-δ	ε
IV	III	1	1	$(1-x/a)^{1-\varepsilon}$	1+α-ε=-n	1+β- ε	γ	δ	2-ε
V	I,II	$x^{1-\gamma}$	$(1-x)^{1-\delta}$	1	2+α-γ-δ=-n	2+β-γ-δ	2-γ	2-δ	ε
VI	I,III	$x^{1-\gamma}$	1	$(1-x/a)^{1-\varepsilon}$	2+α-γ-ε=-n	2+β-γ-ε	2-γ	δ	2-ε
VII	II,III	1	$(1-x)^{1-\delta}$	$(1-x/a)^{1-\varepsilon}$	2+α-δ-ε=-n	2+β-δ-ε	γ	2-δ	2-ε
VIII	I,II,III	$x^{1-\gamma}$	$(1-x)^{1-\delta}$	$(1-x/a)^{1-\varepsilon}$	2-β=-n	2- α	2-γ	2-δ	2-ε

Liens avec la construction des polynômes de Lamé

L'équation de Lamé est un cas particulier de l'équation de Heun. Pour cela rappelons la forme Jacobienne de l'équation de Heun, en posant z = $sn^2(\mu,k)$ et a =$1/k^2$:

$$y''(\mu)+\left\{(2\gamma-1)\frac{cn(\mu,k)dn(\mu,k)}{sn(\mu,k)}-(2\delta-1)\frac{sn(\mu,k)dn(\mu,k)}{cn(\mu,k)}-(2\varepsilon-1)k^2\,\frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{dn(\mu,k)}\right\}y'(\mu)+4k^2\left(\alpha\ \beta\ sn^2(\mu,k)-q\right)y(\mu)=0$$

Avec les valeurs γ=δ=ε=1/2, il vient :

$$\begin{array}{l} y''(\mu)+\left(4k^2\alpha\beta sn^2(\mu,k)-4k^2q\right)y(\mu)=0 \\ Posons \quad 4\alpha\beta=-\nu(\nu+1) \quad \lambda=-4k^2q\Rightarrow y''(\mu)+\left(\lambda-\nu(\nu+1)k^2sn^2(\mu,k)\right)y(\mu)=0 \end{array}.$$

En posant maintenant le paramètre α = -n/2, et n=2N de manière à obtenir un polynôme de degré N, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha\beta=-\nu(\nu+1) \\ \nu=n \\ \alpha=-\frac{n}{2}=-N \end{array}\right\}\Rightarrow\beta=\frac{n+1}{2}=\frac{2N+1}{2}\qquad\lambda=-4k^2q.$$

$$\Rightarrow y''(\mu)+\left(\lambda-n(n+1)k^2sn^2(\mu,k)\right)y(\mu)=0$$

D'après la construction de la récurrence et des valeurs propres de la matrice, il vient pour le polynôme de Heun/Lamé de type I (ou 0) :

$$\gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2} \qquad \alpha=-\frac{n}{2}=-N \quad \widetilde{\beta}=\frac{n+1}{2}=\frac{2N+1}{2} \qquad a=\frac{1}{k^2} \qquad \lambda=-4k^2q \quad et \quad x_j=(-1)^j c_j$$

$$\begin{cases} r_j=4k^2R_j=(2j+2)(2j+1) \\ q_j=4k^2Q_j=4j^2(1+k^2) \\ 4k^2P_j=4k^2(j-1+\alpha)(j-1+\beta)=4k^2(j-1-N)\left(j-1+\dfrac{2N+1}{2}\right)=2k^2(j-1-N)(2j-2+2N+1) \\ p_j=4k^2P_j=2k^2(j-1-N)(2j-2+2N+1)=-k^2(2N-2j+2)(2N+2j-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{-1}=0 \quad x_0=1 \\ r_jx_{j+1}+(q_j-\lambda)x_j+p_jx_{j-1}=0 \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_N=[x_0,...,x_{N-1},x_N]^t \quad \mathbf{M}_N=\begin{bmatrix} q_0 & r_0 & 0 & ... & ... & 0 & ... \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & ... & 0 & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & 0 & p_{N-3} & q_{N-3} & r_{N-3} & 0 & ... \\ ... & ... & 0 & p_{N-2} & q_{N-2} & r_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & p_{N-1} & q_{N-1} & r_{N-1} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & p_N & q_N \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{M}_N-\lambda\mathbf{I}_N).\mathbf{X}_N=0$$

$$\lambda_{N,m}^0 \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k)\Rightarrow P_{N,m}^0(z)=\sum_{j=0}^{j=N}x_{j,N,m}(\lambda_{N,m}^0)z^j \quad m\in\{0,1,2,..,N\}$$

Ce qui est bien la récurrence du type I des polynômes de Lamé, donnée dans l'ouvrage de 1962 des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (1), page xvii). et dans l'article de 1965 de J.H.Wilkinson « The calculation of Lame polynomials ».

Le type II (ou I) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda=-4k^2q \quad et \quad x_j=(-1)^j c_j \quad n=2N+1$$

$$H_1 \quad \begin{cases} q_I=q+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right) \\ \alpha_I=\alpha+\dfrac{1}{2} \qquad \beta_I=\beta+\dfrac{1}{2} \quad contrainte \\ \gamma_I=\dfrac{3}{2} \qquad \delta_I=\varepsilon_I=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_I=-\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}=-N=\alpha+\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-\dfrac{2N+1}{2} \\ \nu=n=2N+1 \quad 4\alpha\beta=-\nu(\nu+1)=-(2N+1)(2N+2) \\ \beta=\dfrac{2N+2}{2}=N+1\Rightarrow\beta_I=N+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j=4k^2R_j=(2j+2)(2j+3) \\ q_j=4k^2\left(Q_j+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+1\right)\right)=4(k^2+1)\left(j(j+1)+\dfrac{1}{4}\right)=(2j+1)^2(1+k^2) \\ p_j=4k^2P_j=4k^2(j-1+\alpha_I)(j-1+\beta_I)=4k^2(j-1-N)\left(j+N+\dfrac{1}{2}\right)=-k^2(2N-2j+2)(2N+2j+1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{-1}=0 \quad x_0=1 \\ r_jx_{j+1}+(q_j-\lambda)x_j+p_jx_{j-1}=0 \end{cases}$$

$$\lambda_{N,m}^I \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k)\Rightarrow P_{N,m}^I(z)=z\sum_{j=0}^{j=N}x_{j,N,m}(\lambda_{N,m}^I)z^j \quad m\in\{0,1,2,..,N\}$$

Ce qui est exactement la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (2), page xvii).

Le type III (ou II) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N+1$$

$$H_2 \quad \begin{cases} q_{II} = q + \dfrac{1}{4k^2} \\ \alpha_{II} = \alpha + \dfrac{1}{2} \qquad \beta_{II} = \beta + \dfrac{1}{2} \\ \gamma_{II} = \dfrac{1}{2} \qquad \delta_{II} = \dfrac{3}{2} \qquad \varepsilon_{II} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad contrainte \quad \begin{cases} \alpha_{II} = -N = \alpha + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -N - \dfrac{1}{2} \\ \nu = n = 2N+1 \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -(2N+1)(2N+2) \\ \beta = \dfrac{2N+2}{2} = N+1 \Rightarrow \beta_{II} = N + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+1) \\ Q_j + \dfrac{a}{4} = a\left(j + \dfrac{1}{2}\right)^2 + j^2 \\ q_j = 4k^2\left(Q_j + \dfrac{a}{4}\right) = (2j+1)^2 + 4k^2 j^2 \\ p_j = 4k^2 P_j = 4k^2(j-1+\alpha_{II})(j-1+\beta_{II}) = -k^2(2N-2j+2)(2N+2j+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{N,m}^{II} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k) \Rightarrow P_{N,m}^{II}(z) = \sqrt{1-z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\lambda_{N,m}^{II}\right)z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

Ce qui est bien la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (3), page xvii).

Le type IV (ou III) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N+1$$

$$H_3 \quad \begin{cases} q_{III} = q + \dfrac{1}{4} \\ \alpha_{III} = \alpha + \dfrac{1}{2} \qquad \beta_{III} = \beta + \dfrac{1}{2} \\ \gamma_{III} = \dfrac{1}{2} \qquad \delta_{III} = \dfrac{1}{2} \qquad \varepsilon_{III} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad contrainte \quad \begin{cases} \alpha_{III} = -N = \alpha + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -N - \dfrac{1}{2} \\ \nu = n = 2N+1 \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -(2N+1)(2N+2) \\ \beta = N+1 \Rightarrow \beta_{III} = N + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+1) \\ Q_j + \dfrac{1}{4} = j\{j(a+1)+1\} + \dfrac{1}{4} = j^2 a + \left(j + \dfrac{1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow q_j = 4k^2\left(Q_j + \dfrac{1}{4}\right) = (2j+1)^2 + 4k^2 j^2 \\ P_j = (j-1+\tilde{\alpha}_{III})(j-1+\tilde{\beta}_{III}) = (j-1-N)\left(j+N+\dfrac{1}{2}\right) \\ p_j = 4k^2 P_j = -k^2(2N-2j+2)(2N+2j+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{N,m}^{III} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k) \Rightarrow P_{N,m}^{III}(z) = \sqrt{1-k^2z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\lambda_{N,m}^{III}\right)z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

Là encore c'est bien la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (4), page xvii).

Le type V (ou I,II) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N$$

$$H_{1,2} \quad \begin{cases} q_{I,II} = q + \frac{1}{4} + a \\ \alpha_{I,II} = \alpha + 1 \qquad \beta_{I,II} = \beta + 1 \\ \gamma_{I,II} = \frac{3}{2} \qquad \delta_{I,II} = \frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad contrainte \quad \begin{cases} \alpha_{I,II} = -N + 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -N \\ \nu = n = 2N \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -2N(2N+1) \\ \beta = N + \frac{1}{2} \Rightarrow \beta_{I,II} = N + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+3) \\ Q_j = j\left\{\left(j + \frac{1}{2}\right)(a+1) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a\right\} \\ \Rightarrow 4k^2 Q_j = 4\left\{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{k^2}{4} + j(j+2)\right\} = (2j+1)^2 k^2 - k^2 + 4j(j+2) \\ q_j = 4k^2\left\{Q_j + \frac{1}{4} + a\right\} = (2j+1)^2 k^2 - k^2 + 4j(j+2) + k^2 + 4 \\ \Rightarrow q_j = (2j+1)^2 k^2 + (2j+2)^2 \\ p_j = 4k^2 P_j = -(2N-2j)(2N+2j+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{n,m}^{I,II} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(\alpha) \Rightarrow P_{n,m}^{I,II}(z) = z\sqrt{1-z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\begin{smallmatrix} I,II \\ n,m \end{smallmatrix}\right) z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

On retrouve la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (6), page xvii).

Le type VI (ou I,III) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N$$

$$H_{1,3} \quad \begin{cases} q_{I,III} = q + 1 + \frac{1}{4k^2} \\ \alpha_{I,III} = \alpha + 1 \qquad \beta_{I,III} = \beta + 1 \\ \gamma_{I,III} = \frac{3}{2} \qquad \delta_{I,III} = \frac{1}{2} \qquad \varepsilon_{I,III} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad contrainte \quad \begin{cases} \alpha_{I,III} = -N + 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -N \\ \nu = n = 2N \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -2N(2N+1) \\ \beta = N + \frac{1}{2} \Rightarrow \beta_{I,III} = N + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+3) \\ 4k^2 Q_j = 4j\left\{\left(j + \frac{1}{2}\right)(1+k^2) + \frac{3k^2}{2} + \frac{1}{2}\right\} = 2jk^2(2j+4) + (2j+1)^2 - 1 \\ \Rightarrow q_j = 4k^2 Q_j + 4k^2 + 1 = (2j+1)^2 + k^2(2j+2)^2 \\ p_j = 4k^2 P_j = 4k^2(j - 1 + \alpha_{I,III})(j - 1 + \beta_{I,III}) = -k^2(2N-2j)(2N+2j+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{n,m}^{I,III} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k) \Rightarrow P_{n,m}^{I,III}(z) = z\sqrt{1-k^2z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\lambda_{n,m}^{I,III}\right) z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

On retrouve la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (7), page xvii).

Le type VII (ou II,III) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N$$

$$H_{2,3} \begin{cases} q_{II,III} = q + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \\ \alpha_{II,III} = \alpha + 1 \qquad \beta_{II,III} = \beta + 1 \\ \gamma_{II,III} = \frac{1}{2} \qquad \delta_{II,III} = \frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{II,III} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad contrainte \begin{cases} \alpha_{II,III} = -N + 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -N \\ \nu = n = 2N \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -2N(2N+1) \\ \beta = N + \frac{1}{2} \Rightarrow \beta_{II,III} = N + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+1) \\ 4k^2 Q_j = 4j(1+\alpha^2)(j+1) \Rightarrow q_j = 4k^2 Q_j + 1 + k^2 = (1+k^2)(2j+1)^2 \\ p_j = 4k^2 P_j = 4k^2(j - 1 + \alpha_{II,III})(j - 1 + \beta_{II,III}) = -k^2(2N-2j)(2N+2j+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{n,m}^{II,III} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k) \Rightarrow P_{n,m}^{II,III}(z) = \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\lambda_{n,m}^{II,III}\right)z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

On retrouve la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (5), page xvii).

Le type VIII (ou I,II,III) de polynôme de Heun/Lamé, se construit ainsi :

$$Posant \quad \lambda = -4k^2 q \quad et \quad x_j = (-1)^j c_j \quad n = 2N+1$$

$$H_{1,2,3} \begin{cases} q_{I,II,III} = q + 1 + a \\ \alpha_{I,II,III} = 2 - \beta \\ \beta_{I,II,III} = 2 - \alpha \\ \alpha = \gamma + \delta + \varepsilon - \beta - 1 = \gamma + \delta + \varepsilon - n - 3 \\ \Rightarrow \beta_{I,II,III} = n + 5 - \gamma - \delta - \varepsilon \\ \gamma_{I,II,III} = \frac{3}{2} \qquad \delta_{I,II,III} = \frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{I,II,III} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad contrainte \begin{cases} \alpha_{I,II,III} = -N + 1 = 2 - \beta \Rightarrow \beta = N + 1 \\ \nu = n = 2N+1 \quad 4\alpha\beta = -\nu(\nu+1) = -(2N+1)(2N+2) \\ 2\alpha = -(2N+1) \\ \alpha = -\left(N + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \beta_{I,II,III} = 2 - \alpha = N + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_j = 4k^2 R_j = (2j+2)(2j+3) \\ 4k^2 Q_j = 4j(j+2)(k^2+1) \Rightarrow q_j = 4k^2 Q_j + 4(1+k^2) = (1+k^2)(2j+2)^2 \\ p_j = 4k^2 P_j = 4k^2(j - 1 + \alpha_{I,II,III})(j - 1 + \beta_{I,II,III}) = -k^2(2N-2j)(2N+2j+3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \\ r_j x_{j+1} + (q_j - \lambda)x_j + p_j x_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{n,m}^{I,II,III} \quad valeurs\ propres\ de \quad \mathbf{M}_N(k) \Rightarrow P_{n,m}^{I,II,III}(z) = z\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}\sum_{j=0}^{j=N} x_{j,N,m}\left(\lambda_{n,m}^{I,II,III}\right)z^j \quad m \in \{0,1,2,..,N\}$$

On retrouve la récurrence donnée dans l'ouvrage des auteurs F.M.Arscott, I.M.Khabaza « Tables of Lamé Polynomials » (voir Table I, ligne (8), page xvii).

Wronskien des solutions de l'équation de Heun

Il est possible de calculer la forme générale du Wronskien de deux solutions indépendantes de l'équation de Heun avec un même jeu de paramètre. Prenons l'équation de Heun sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
& y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\beta z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}y(z)\right\}+(\alpha\beta z-q)y(z)=0
\end{aligned}
$$

Considérons deux solutions indépendantes, alors nous obtenons l'équation différentielle du Wronskien de l'équation de Heun :

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases}
y_2(z)\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\varepsilon}\dfrac{\partial y_1(z)}{\partial z}\right\}+(\alpha\beta z-q)y_1(z)y_2(z)=0 \\
y_1(z)\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\varepsilon}\dfrac{\partial y_2(z)}{\partial z}\right\}+(\alpha\beta z-q)y_1(z)y_2(z)=0
\end{cases} \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\varepsilon}\left(y_1(z)\frac{\partial y_2(z)}{\partial z}-\frac{\partial y_1(z)}{\partial z}y_2(z)\right)\right\}=0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{\gamma}(z-1)^{\delta}(z-a)^{\varepsilon}\,Wronskien\{y_1(z),y_2(z)\}\right\}=0
\end{aligned}
$$

Il vient donc : $Wronskien\{y_1(z),y_2(z)\}=C(q,a,\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,z^{-\gamma}(z-1)^{-\delta}(z-a)^{-\varepsilon}$

Supposons maintenant que l'on connaît explicitement une solution de première espèce de l'équation de Heun. On peut alors déterminer formellement la forme intégrale de la solution de deuxième espèce par la formule bien connue du Wronskien :

$$
\begin{aligned}
& Wronskien\{y_1(z),y_2(z)\}=C(q,a,\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,z^{-\gamma}(z-1)^{-\delta}(z-a)^{-\varepsilon} \\
& \frac{d\left\{\dfrac{y_2(z)}{y_1(z)}\right\}}{dz}=\frac{y_1(z)y_2'(z)-y_2(z)y_1'(z)}{y_1^{2}(z)}=\frac{Wronskien\{y_1(z),y_2(z)\}}{y_1^{2}(z)} \\
& \Rightarrow y_2(z)=y_1(z)\int^{z}d\zeta\left\{\frac{Wronskien\{y_1(z),y_2(z)\}}{y_1^{2}(z)}\right\} \\
& \Rightarrow y_2(z)=y_1(z)\,C(q,a,\alpha,\beta,\gamma,\delta)\int^{z}d\zeta\left\{\frac{z^{-\gamma}(z-1)^{-\delta}(z-a)^{-\varepsilon}}{y_1^{2}(z)}\right\}
\end{aligned}
$$

Cas particulier : solution triviale de l'équation de Heun :

L'équation de Heun : $\begin{cases} y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\beta z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs \quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases}$ *se simplifie lorsque le terme* $\alpha\beta z-q$ *s'annule soit lorsque* $\alpha\beta=0 \quad et \quad q=0$*. L'équation différentielle devient alors une équation du premier degré moyennant :* $y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta}{1-z}-\frac{\varepsilon}{a-z}\right\}y'(z)=0$.

$$\frac{dLog(y'(z))}{dz}=-\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{1-z}+\frac{\varepsilon}{a-z}\Leftrightarrow Log(y'(z))=-\gamma\ Log(z)-\delta\ Log(1-z)-\varepsilon\ Log(a-z)+C_1$$
$$\Leftrightarrow y'(z)=\widetilde{C}_1\ z^{-\gamma}\ (1-z)^{-\delta}(a-z)^{-\varepsilon}$$

Il vient :

$$\Rightarrow \begin{cases} y(z)=\widetilde{C}_1\int_z dt\ t^{-\gamma}\ (1-t)^{-\delta}(a-t)^{-\varepsilon}+\widetilde{C}_2 \\ \alpha\beta=0 \quad et \quad q=0 \\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases}$$

En posant a=1/k² il vient la forme suivante de la solution dîtes « triviale » :

$$\begin{cases} y(z)=\widetilde{C}_1\int_z dt\ t^{-\gamma}\ (1-t)^{-\delta}\left(1-k^2t\right)^{-\varepsilon}+\widetilde{C}_2 \\ k\in[0,1] \\ \alpha\beta=0 \quad et \quad q=0 \\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases}$$

Cas particulier : solution hypergéométrique de l'équation de Heun

Ici je présente certains liens permettant de passer de l'équation de Heun :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0\Rightarrow HeunG_l(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$$

à l'équation hypergéométrique :

$$z(1-z)y''(z)+\{c-z\ (a+b+1)\}\ y'(z)-a\ b\ y(z)=0\Leftrightarrow y''(z)+\left\{\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{a\ b}{z(z-1)}y(z)=0 \quad\Rightarrow\quad {}_2F_1(a,b;c;z)$$

Dans certains cas particulier l'équation de Heun devient un équation hypergéométrique. Par exemple lorsque q=αβa et ε=0, il vient :

$$\begin{cases} y''(z)+\left\{\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}\right\}y'(z)+\dfrac{\alpha\beta}{z(z-1)}y(z)=0 \\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(1-z)y''(z)+\{\gamma-z\,(\gamma+\delta)\}y'(z)+\alpha\beta\;y(z)=0 \\ \Leftrightarrow z(1-z)y''(z)+\{\gamma-z\,(\alpha+\beta+1)\}\,y'(z)+\alpha\beta\;y(z)=0 \end{cases}$$

C'est bien une équation hypergéométrique et étant donné que la solution de Fröbenius développée autour de z=0 est identique à la solution hypergéométrique $_2F_1$, à une constante près, on a :

$$\alpha+\beta+1=\gamma+\delta \Rightarrow HeunG_l(a,\alpha\;\beta\;a,\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma;z)={}_2F_1(\alpha,\beta\;;\gamma\;;z)$$

De même lorsque δ=0 et q=α β , il vient :

$$\begin{cases} y''(z)+\left\{\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\dfrac{\alpha\beta}{z(z-a)}y(z)=0 \\ \alpha+\beta+1=\gamma+\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{z}=\dfrac{z}{a} \qquad dz=a\,d\tilde{z} \\ y''(\tilde{z})+\left\{\dfrac{\gamma}{\tilde{z}}+\dfrac{\varepsilon}{\tilde{z}-1}\right\}y'(\tilde{z})+\dfrac{\alpha\beta}{\tilde{z}(\tilde{z}-1)}y(\tilde{z})=0 \\ \Leftrightarrow \tilde{z}(1-\tilde{z})y''(\tilde{z})+\{\gamma-\tilde{z}\,(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)\}y'(\tilde{z})+\alpha\beta\;y(\tilde{z})=0 \\ \alpha+\beta+1=\gamma+\varepsilon \end{cases}$$

Soit : $HeunG_l(a,\alpha\;\beta,\alpha,\beta,\gamma,0;z)={}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;\dfrac{z}{a}\right)$

On a également lorsque γ=0 et q=0 :

$$\begin{cases} y''(z)+\left\{\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\dfrac{\alpha\beta}{(z-1)(z-a)}y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs \quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{z}=\dfrac{z-1}{a-1} \qquad dz=(a-1)d\tilde{z} \\ y''(\tilde{z})+\left\{\dfrac{\delta}{\tilde{z}}+\dfrac{\varepsilon}{\tilde{z}-1}\right\}y'(\tilde{z})+\dfrac{\alpha\beta}{\tilde{z}(\tilde{z}-1)}y(\tilde{z})=0 \\ \Leftrightarrow \tilde{z}(1-\tilde{z})y''(\tilde{z})+\{\gamma-\tilde{z}\,(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)\}y'(\tilde{z})+\alpha\beta\;y(\tilde{z})=0 \\ \alpha+\beta+1=\delta+\varepsilon \end{cases}$$

Soit : $HeunG_l(a,0,\alpha,\beta,0,\delta;z)={}_2F_1\left(\alpha,\beta;\delta;\dfrac{z-1}{a-1}\right)$

D'autres valeurs de paramètres conduisent à des relations triviales. Par exemple si a=1 et q=αβ :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta+\varepsilon}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}y(z)=0$$
$$\Rightarrow HeunG_l(1,\alpha\;\beta,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)=\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

De même pour a=0 et q=0 et $\varepsilon=0\Rightarrow\delta=\alpha+\beta-\gamma+1$*, alors*

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}y(z)=0 \Rightarrow HeunG_l(0,0,\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)=\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

Forme jacobienne elliptique de l'équation de Heun et solutions de Carlitz

La forme Jacobienne elliptique de l'équation de Heun est obtenue en posant le changement de variable suivant $z = sn^2(\mu,k)$ et $a = 1/k^2$:

$$y''(\mu)+\left\{(2\gamma-1)\frac{cn(\mu,k)dn(\mu,k)}{sn(\mu,k)}-(2\delta-1)\frac{sn(\mu,k)dn(\mu,k)}{cn(\mu,k)}-(2\varepsilon-1)\,k^2\,\frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{dn(\mu,k)}\right\}y'(\mu)+4k^2\left(\alpha\ \beta\ sn^2(\mu,k)-q\right)y(\mu)=0$$

On substitue le plus souvent au paramètre q le paramètre s comme suit : $s=-k^2q$ ce qui permet d'écrire l'équation de Heun sous la forme :

$$y''(\mu)+\left\{(2\gamma-1)\frac{cn(\mu,k)dn(\mu,k)}{sn(\mu,k)}-(2\delta-1)\frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{cn(\mu,k)}-(2\varepsilon-1)\,k^2\,\frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{dn(\mu,k)}\right\}y'(\mu)+4\left(s+\alpha\ \beta\ k^2sn^2(\mu,k)\right)y(\mu)=0$$

Avec ce jeu de paramètres, il est tout à fait équivalent de décrire la fonction de Heun avec la notation suivante : $HeunG_l\left(k^2,s\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z\right)$

Avec les valeurs γ=δ=ε=1/2, il vient l'équation de Lamé :

$$y''(\mu)+\left(4k^2\alpha\ \beta\ sn^2(\mu,k)-4k^2q\right)y(\mu)=0$$
$$Posons\quad 4\alpha\ \beta=-\nu(\nu+1)\quad \lambda=-4k^2q=4s\Rightarrow y''(\mu)+\left(\lambda-\nu(\nu+1)k^2sn^2(\mu,k)\right)y(\mu)=0$$

A partir de la forme Jacobienne, on obtient une solution dîtes de Carlitz en posant :

$$\alpha\ \beta=0\quad \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow y''(\mu)-4k^2q\ y(\mu)=y''(\mu)+4s\ y(\mu)=0$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{1}{2}\quad équivalence\quad \alpha=0\,,\beta=\frac{1}{2}\quad ou\quad \alpha=\frac{1}{2}\,,\beta=0$$
$$Posons\quad s=-k^2q\Rightarrow y(\mu)=Exp\left(\pm i\ 2\sqrt{s}\ \mu\right)\quad Or\quad \mu=sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)$$
$$\Rightarrow y(z)=Exp\left(\pm i\ 2\ \sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\Rightarrow\begin{cases}y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\\ y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

Par ailleurs nous savons que l'inverse de la fonction jacobienne sinus elliptique se définit facilement par l'intégrale suivante :

$$sn^{-1}(x,k)=\int_0^x dt\,\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\quad x\in[-1,1]\rightarrow sn^{-1}\left(\sqrt{x},k\right)=\int_0^{\sqrt{x}} dt\,\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\quad x\in[0,1]$$

On trouve d'autres solutions en appliquant des transformations F-Homotopiques suivantes :

$$\begin{cases}y(z)=z^a(1-z)^b\left(1-k^2z\right)^c g(z)\\ a(a-(1-\gamma))=b(b-(1-\delta))=c(c-(1-\varepsilon))=0\\ \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow a\left(a-\frac{1}{2}\right)=b\left(b-\frac{1}{2}\right)=c\left(c-\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

Ce sont évidemment les transformations F-Homotopiques qui conduisent également à des fonctions de Heun.

Partant de $\begin{cases} y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right) \\ y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases} \Rightarrow g(z)=z^{-a}(1-z)^{-b}\left(1-k^2z\right)^{-c}y(z)$ *et en appliquant les règles de transformation des paramètres que l'on a déjà exposé, il vient :*

$$\gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2} \quad \alpha=0 \quad \beta=\frac{1}{2} \quad a=\frac{1}{k^2} \quad s=-k^2q$$

$$y(z)=z^{\frac{1}{2}}y_I(z)\Rightarrow y_I(z)=HeunG_l(a,q_I\,;\alpha_I,\beta_I,\gamma_I,\delta_I\,;z) \quad H_1 \quad \begin{cases} q_I=q+\frac{1}{4k^2}\left(1+k^2\right)\Rightarrow s_I=s-\frac{1+k^2}{4} \\ \alpha_I=\frac{1}{2} \qquad \beta_I=1 \\ \gamma_I=\frac{3}{2} \qquad \delta_I=\frac{1}{2} \qquad \varepsilon_I=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=(1-z)^{\frac{1}{2}}y_{II}(z)\Rightarrow y_{II}(z)=HeunG_l(a,q_{II}\,;\alpha_{II},\beta_{II},\gamma_{II},\delta_{II}\,;z) \quad H_2 \quad \begin{cases} q_{II}=q+\frac{1}{4k^2}\Rightarrow s_{II}=s-\frac{1}{4} \\ \alpha_{II}=\frac{1}{2} \qquad \beta_{II}=1 \\ \gamma_{II}=\frac{1}{2} \qquad \delta_{II}=\frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{II}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=\left(1-k^2z\right)^{\frac{1}{2}}y_{III}(z)\Rightarrow y_{III}(z)=HeunG_l(a,q_{III}\,;\alpha_{III},\beta_{III},\gamma_{III},\delta_{III}\,;z) \quad H_3 \quad \begin{cases} q_{III}=q+\frac{1}{4}\Rightarrow s_{III}=s-\frac{k^2}{4} \\ \alpha_{III}=\frac{1}{2} \qquad \beta_{III}=1 \\ \gamma_{III}=\frac{1}{2} \qquad \delta_{II}=\frac{1}{2} \qquad \varepsilon_{III}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}HeunG_l\left(a,q_{I,II}\,;\alpha_{I,II},\beta_{I,II},\gamma_{I,II},\delta_{I,II}\,;z\right) \quad H_{1,2} \quad \begin{cases} q_{I,II}=q+\frac{1}{4}+\frac{1}{k^2}\Rightarrow s_{I,II}=s-\frac{k^2}{4}-1 \\ \alpha_{I,II}=1 \qquad \beta_{I,II}=\frac{3}{2} \\ \gamma_{I,II}=\frac{3}{2} \qquad \delta_{I,II}=\frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{I,II}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=z^{\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{\frac{1}{2}}HeunG_l\left(a,q_{I,III}\,;\alpha_{I,III},\beta_{I,III},\gamma_{I,III},\delta_{I,III}\,;z\right) \quad H_{1,3} \quad \begin{cases} q_{I,III}=q+1+\frac{1}{4k^2}\Rightarrow s_{I,III}=s-k^2-\frac{1}{4} \\ \alpha_{I,III}=1 \qquad \beta_{I,III}=\frac{3}{2} \\ \gamma_{I,III}=\frac{3}{2} \qquad \delta_{I,III}=\frac{1}{2} \qquad \varepsilon_{I,III}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=(1-z)^{\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{\frac{1}{2}}HeunG_l\left(a,q_{II,III}\,;\alpha_{II,III},\beta_{II,III},\gamma_{II,III},\delta_{II,III}\,;z\right) \quad H_{2,3} \quad \begin{cases} q_{II,III}=q+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\Rightarrow s_{II,III}=s-\frac{k^2+1}{4} \\ \alpha_{II,III}=1 \qquad \beta_{II,III}=\frac{3}{2} \\ \gamma_{II,III}=\frac{1}{2} \qquad \delta_{II,III}=\frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{II,III}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$y(z)=z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{\frac{1}{2}}HeunG_l\left(a,q_{I,II,III}\,;\alpha_{I,II,III},\beta_{I,II,III},\gamma_{I,II,III},\delta_{I,II,III}\,;z\right) \quad H_{1,2,3} \quad \begin{cases} q_{I,II,III}=q+1+\frac{1}{k^2}\Rightarrow s_{I,II,III}=s-1-k^2 \\ \alpha_{I,II,III}=\frac{3}{2} \qquad \beta_{I,II,III}=2 \\ \gamma_{I,II,III}=\frac{3}{2} \qquad \delta_{I,II,III}=\frac{3}{2} \qquad \varepsilon_{I,II,III}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

A ce stade si l'on normalise la fonction de Heun de telle manière qu'elle soit égale à 1 pour z=0, et avec les nouvelles notations : $HeunG_l\left(k^2, s\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;0\right)=1$*, alors on obtient :*

$$sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)=\sqrt{z}+O\left(z^{\frac{3}{2}}\right)\Rightarrow Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)=2\sqrt{s}\times\sqrt{z}+O\left(z^{\frac{3}{2}}\right)\qquad\begin{cases}y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\\y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_I(z)=HeunG_l\left(a,s-\frac{1+k^2}{4}\,;\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\,;z\right)=z^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Sin\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{2\sqrt{s}\sqrt{z}}\\y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{II}(z)=HeunG_l\left(a,s-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\,;z\right)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Cos\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{\sqrt{1-z}}\\y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{III}(z)=HeunG_l\left(a,s-\frac{k^2}{4}\,;\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;z\right)=\left(1-k^2z\right)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Cos\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{\sqrt{1-k^2z}}\\y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{I,II}(z)=HeunG_l\left(a,s-\frac{k^2}{4}-1\,;1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\,;z\right)=z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Sin\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{2\sqrt{s}\sqrt{z}\sqrt{1-z}}\\y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{I,III}(z)=HeunG_l\left(a,s-k^2-\frac{1}{4}\,;1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\,;z\right)=z^{-\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Sin\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{2\sqrt{s}\sqrt{z}\sqrt{1-k^2z}}\\y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{II,III}(z)=HeunG_l\left(a,s-\frac{k^2+1}{4}\,;1,\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\,;z\right)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Cos\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-k^2z}}\\y(z)=Cos\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_{I,II,III}(z)=HeunG_l\left(a,s-1-k^2\,;\frac{3}{2},2,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\,;z\right)=z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k^2z\right)^{-\frac{1}{2}}y(z)=\frac{Sin\left(2\,s\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)}{2\sqrt{s}\sqrt{z}\sqrt{1-z}\sqrt{1-k^2z}}\\y(z)=Sin\left(2\sqrt{s}\times sn^{-1}\left(\sqrt{z},k\right)\right)\end{cases}$$

Bien évidemment les mêmes solutions en remplaçant sinus par cosinus et inversement sont également solutions de l'équation de Heun.

Forme Jacobienne potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun

En partant de la forme jacobienne on peut éliminer le terme de dérivée première en effectuant le changement de fonction suivant :

$$\lambda = 4s \quad 4\alpha\,\beta = -(m_0 + m_1 + m_2 + m_3)(m_0 + 1 - m_1 - m_2 - m_3) \qquad m_1 = \frac{1-2\gamma}{2} \qquad m_2 = \frac{1-2\delta}{2} \qquad m_3 = \frac{1-2\varepsilon}{2}$$

$$N = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \Rightarrow 4\alpha\,\beta = -N(2m_0 - N + 1)$$

$$y''(\mu) + \left\{-2m_1 \frac{cn(\mu,k)dn(\mu,k)}{sn(\mu,k)} + 2m_2 \frac{sn(\mu,k)dn(\mu,k)}{cn(\mu,k)} + 2m_3\, k^2 \frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{dn(\mu,k)}\right\} y'(\mu) + \left(\lambda - N(2m_0 - N + 1)k^2 sn^2(\mu,k)\right) y(\mu) = 0$$

$$y(\mu) = sn^{m_1}(\mu,k)\, cn^{m_2}(\mu,k)\, dn^{m_3}(\mu,k)\, Y(\mu)$$

$$\Rightarrow Y''(\mu) - \left\{m_1(m_1+1)\frac{1}{sn^2(\mu,k)} + m_2(m_2+1)\frac{dn^2(\mu,k)}{cn^2(\mu,k)} + m_3(m_3+1)k^2 \frac{cn^2(\mu,k)}{dn^2(\mu,k)} + k^2 m_0(m_0+1)\, sn^2(\mu,k) - \lambda - (m_1+m_2)^2 + k^2(m_1+m_3)^2\right\} Y(\mu) = 0$$

Cette forme de l'équation de Heun est utilisée dans des publications tant anciennes que modernes, notamment pour se rapprocher de l'équation de Shrödinger unidimensionnelle, comme par exemple dans la publication originale de G.Darboux de 1882 « Sur une équation linéaire », Compte rendu de l'Académie des sciences Tome XCIV n°25, pages 1645 à 1648 et bien plus récemment en 2005 par G.Valent « Heun functions versus elliptic functions » formules (44), (45) et (46)

Gaston Darboux présente cette équation sous la forme suivante tout à fait équivalente :

$$Y''(\mu) = \left\{m_1(m_1+1)\frac{1}{sn^2(\mu,k)} + m_2(m_2+1)\frac{dn^2(\mu,k)}{cn^2(\mu,k)} + m_3(m_3+1)k^2 \frac{cn^2(\mu,k)}{dn^2(\mu,k)} + k^2 m_0(m_0+1)\, sn^2(\mu,k) - \lambda - (m_1+m_2)^2 + k^2(m_1+m_3)^2\right\} Y(\mu)$$

$$h = -\lambda - (m_1+m_2)^2 + k^2(m_1+m_3)^2$$

$$Y''(\mu) = \left\{m_1(m_1+1)\frac{1}{sn^2(\mu,k)} + m_2(m_2+1)\frac{dn^2(\mu,k)}{cn^2(\mu,k)} + m_3(m_3+1)k^2 \frac{cn^2(\mu,k)}{dn^2(\mu,k)} + k^2 m_0(m_0+1)\, sn^2(\mu,k) + h\right\} Y(\mu)$$

En résumé via les transformations exposées ci-dessus l'équation de Darboux ou forme potentielle de Shrödinger est équivalente à l'équation de Heun suivante :

$$\Rightarrow Y''(\mu) = \left\{m_1(m_1+1)\frac{1}{sn^2(\mu,k)} + m_2(m_2+1)\frac{dn^2(\mu,k)}{cn^2(\mu,k)} + m_3(m_3+1)k^2 \frac{cn^2(\mu,k)}{dn^2(\mu,k)} + k^2 m_0(m_0+1)\, sn^2(\mu,k) - \lambda - (m_1+m_2)^2 + k^2(m_1+m_3)^2\right\} Y(\mu)$$

$$\gamma = \frac{1-2m_1}{2} \qquad \delta = \frac{1-2m_2}{2} \qquad \varepsilon = \frac{1-2m_3}{2} \Leftrightarrow m_1 = \frac{1-2\gamma}{2} \qquad m_2 = \frac{1-2\delta}{2} \qquad m_3 = \frac{1-2\varepsilon}{2} \qquad \lambda = 4s = -4qk^2$$

$$y(\mu) = sn^{\frac{1-2\gamma}{2}}(\mu,k)\, cn^{\frac{1-2\delta}{2}}(\mu,c)\, dn^{\frac{1-2\varepsilon}{2}}(\mu,k) Y(\mu) \qquad \gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1 \qquad x = sn^2(\mu,k)$$

$$4\alpha\,\beta = -\left(m_0 + \frac{3-2(\gamma+\delta+\varepsilon)}{2}\right)\left(m_0 + 1 - \frac{3-2(\gamma+\delta+\varepsilon)}{2}\right) = (\alpha+\beta)^2 - \left(m_0 + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2 = \left(m_0 + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \alpha = \beta \pm \left(m_0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$4\alpha\,\beta = \left(\alpha + \beta - m_0 - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha + \beta + m_0 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 = \left(m_0 + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = \pm\left(m_0 + \frac{1}{2}\right) \\ \beta + \alpha = \frac{1}{2} - (m_1 + m_2 + m_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \\ 2\beta = m_0 + 1 - (m_1 + m_2 + m_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y''(x) + \left\{\frac{1-2m_1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1-2m_2}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1-2m_3}{2}\frac{k^2}{k^2x-1}\right\} y'(x) + \frac{s + \alpha\,\beta\, k^2 x}{x(1-x)(1-k^2x)} y(x) = 0$$

Autrement dit dans l'article de 1882 « Sur une équation linéaire » de Gaston Darboux, la méthode de résolution de l'équation de Heun précédente dans le cas exclusif où m_0, m_1, m_2 et m_3 sont tous des entiers positifs ou nuls est esquissée, soit lorsque γ,δ,ε,α,β sont tous des paramètres de valeurs demi-entières, et cela à défaut d'être tout à fait résolu explicitement. Le cas de l'équation de Lamé est par contre assez facilement explicité dans un article de 1872 de C.Hermite dont Gaston Darboux s'inspire par une méthode de « quadrature » introduite par Charles Hermite quelques années auparavant justement pour la résolution du cas de l'équation de Lamé avec le paramètre dit ν entier et qui consiste à établir que :

1- le produit de deux solutions indépendantes de l'équation de Heun (ou Lamé en l'occurrence pour C.Hermite) suit invariablement une équation différentielle du troisième degré

2- le produit peut également être un polynôme d'un certain degré à définir (dépendant des paramètres m_0,m_1,m_2 et m_3). Dans le cas de l'équation de Lamé le degré du polynôme est précisément m_0.

3- les expressions des deux solutions indépendantes peuvent être explicitées par des intégrales indéfinies sur le polynôme « produit » et calculé auparavant . Une variable d'intégration calculée à partir de l'observance de l'équation de Heun de départ permet de boucler l'expression théorique de la solution.

Mais ce point fera l'objet du chapitre suivant dans l'exposé de ce document. Pour plus d'information il faut également se reporter aux articles de 2001 et 2003 de A.O.SMIRNOV « ELLIPTIC SOLITONS AND HEUN'S EQUATION » et « FINITE-GAP SOLUTIONS OF THE FUCHSIAN EQUATIONS » dans lesquels est exposée une méthode de construction « plus ou moins explicite » et un peu « abstraite » parfois. Un résumé de cette méthode est également donnée dans un article anonyme de 2015 : « Hermite–Van Vleck polynomials » ou encore dans l'article de G.Valent « Heun functions versus elliptic functions » cité ci-dessus.

Équation différentielle du produit de deux solutions quelconques de l'équation de Heun et l'équation de Lamé

L'équation de Heun $\begin{cases} y''(z)+\left(\dfrac{\gamma_1}{z-a_1}+\dfrac{\gamma_2}{z-a_2}+\dfrac{\gamma_3}{z-a_3}\right)y'(z)+\dfrac{\alpha\ \beta\ z-q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\ y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs \quad \alpha+\beta+1=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \end{cases}$

peut se mettre sous la forme : $\begin{cases} p(z)=\dfrac{\gamma_1}{z-a_1}+\dfrac{\gamma_2}{z-a_2}+\dfrac{\gamma_3}{z-a_3} \\ q(z)=\dfrac{\alpha\ \beta\ z-q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} \end{cases} \Rightarrow y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$

La démarche pour obtenir l'équation différentielle d'un quelconque produit de deux solutions de l'équation différentielle de Heun est calquée sur celle développée initialement en 1872 par Charles Hermite dans un feuillet publié de son cours à Polytechnique dénommé « Sur l'équation de Lamé », et développé plus précisément dans un extrait d'une lettre au mathématicien italien F.Brioschi portant le même nom et publié en 1877.

Prenons deux solutions quelconques indépendantes de l'équation y_1 et y_2, la solution générale w est une combinaison linéaire de ces deux solutions. Formons le carré de cette solution générale w et cherchons à quelle équation différentielle ordinaire il souscrit :

$$\begin{aligned}
&y(z)=a\ y_1(z)+b\ y_2(z)\Rightarrow w(z)=y^2(z)=a^2y_1{}^2(z)+b^2y_2{}^2(z)+2ab\ y_1(z)y_2(z)\\
&w'(z)=2y(z)y'(z) \quad w''(z)=2y(z)y''(z)+2y'^2(z)\\
&Comme \quad y''(z)=-p(z)\,y'(z)-q(z)\,y(z)\Rightarrow w''(z)=2y'^2(z)-2p(z)\,y(z)y'(z)-2q(z)\,y^2(z)\\
&\Rightarrow w''(z)=2y'^2(z)-p(z)w'(z)-2q(z)\,w(z)\\
&\Rightarrow w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)=2y'^2(z)
\end{aligned}$$

Si l'on différencie de nouveau :

$$\begin{aligned}
&\left(w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)\right)'=4y'(z)y''(z)\\
&\Rightarrow \left(w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)\right)'=-4\left(p(z)\,y'^2(z)+q(z)\,y(z)\,y'(z)\right)=-\left(4p(z)\,y'^2(z)+2q(z)\,w'(z)\right)\\
&Comme \quad y'^2(z)=\frac{w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)}{2}\\
&\Rightarrow \left(w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)\right)'+2p(z)\left(w''(z)+p(z)w'(z)+2q(z)\,w(z)\right)+2q(z)\,w'(z)=0\\
&\Rightarrow w'''(z)+3p(z)w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+\left(4p(z)q(z)+2q'(z)\right)w(z)=0
\end{aligned}$$

Sachant que le carré de w est formé d'une combinaison linéaire de trois produits, les deux carrés et le produit des deux solutions indépendantes, l'équation différentielle du troisième degré est bien celle la plus générale du produit de deux solutions indépendantes ou non de l'équation différentielle du second degré. Il est évident que ce résultat se généralise immédiatement à n'importe quelle équation fuschienne du second degré à nombre quelconque de points singuliers réguliers puisque l'équation différentielle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\dfrac{V_{N-2}(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0 \\ p(z)=\sum_{l=1}^{l=p}\dfrac{\gamma_l}{z-a_l} \quad q(z)=\dfrac{V_{N-2}(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)} \end{cases} \Rightarrow y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$$

Prenons maintenant le cas de l'équation de Lamé où :

$$\begin{cases} a_1=0 \quad a_2=1 \quad a_3=\dfrac{1}{k^2} \\ p(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{k^2}{k^2z-1}\right) \\ q(z)=\dfrac{h-v(v+1)k^2\,z}{4z(z-1)(k^2z-1)} \end{cases}$$

On remarque pour l'équation de Lamé que p(z) est un rapport typique de dérivée logarithmique :

$$\begin{cases} p(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{k^2}{k^2z-1}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{A'(z)}{A(z)} \\ q(z)=\dfrac{h-v(v+1)k^2\,z}{4z(z-1)(k^2z-1)}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{B(z)}{A(z)} \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} A(z)=z(z-1)(k^2z-1) \\ B(z)=\dfrac{v(v+1)k^2z-h}{2} \end{cases}$$

A(z) est donc un polynôme de degré 3 et B(z) un polynôme de degré 1. Alors l'équation différentielle de Lamé prend la forme : $2A(z)y''(z)+A'(z)\,y'(z)=B(z)\,y(z)$. *L'équation différentielle du produit de deux solutions indépendantes de cette équation devient :*

$$\begin{aligned} & w'''(z)+3p(z)w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+\left(4p(z)q(z)+2q'(z)\right)w(z)=0 \\ & p(z)=\frac{1}{2}\frac{A'(z)}{A(z)}\rightarrow p'(z)+2p^2(z)=\frac{1}{2}\frac{A''(z)A(z)-A'^2(z)}{A^2(z)}+\frac{1}{2}\frac{A'^2(z)}{A^2(z)}=\frac{1}{2}\frac{A''(z)}{A(z)} \\ & q(z)=-\frac{1}{2}\frac{B(z)}{A(z)}\rightarrow q'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{B(z)A'(z)}{A^2(z)}-\frac{B'(z)}{A(z)}\right)\Rightarrow 2q'(z)+4p(z)q(z)=-\frac{B'(z)}{A(z)} \\ & \Rightarrow 2A(z)\,w'''(z)+3A'(z)\,w''(z)+\left(A''(z)-4B(z)\right)w'(z)+\left(A'(z)q(z)+A(z)q'(z)\right)w(z)=0 \\ & \Rightarrow 2A(z)\,w'''(z)+3A'(z)\,w''(z)+A''(z)\,w'(z)=2B'(z)\,w(z)+4B(z)\,w'(z) \end{aligned}$$

Que nous écrirons : $2A(z)\,w^{(3)}(z)+3A'(z)\,w^{(2)}(z)+A''(z)\,w^{(1)}(z)=2B'(z)\,w(z)+4B(z)\,w^{(1)}(z)$

C.Hermite montre qu'il existe une solution polynomiale de cette équation du troisième degré lorsque v est un nombre entier. Pour cela il différencie p fois cette équation et obtient le résultat suivant (je pense qu'il y a une petite erreur dans le calcul du terme de dérivée (p+1)-ième fois, mais cela ne porte pas à conséquence pour la suite du raisonnement) :

$$
\begin{aligned}
&2A(z)\,w^{(p+3)}(z)+(2p+3)A'(z)w^{(p+2)}(z)+\left((p+1)^2A''(z)-4B(z)\right)w^{(p+1)}(z)+\\
&+\left(2p(p-1)(p-2)+9p(p-1)+6p-\nu(\nu+1)(2p+1)\right)k^2w^{(p)}(z)=0\\
&\Leftrightarrow 2A(z)\,w^{(p+3)}(z)+(2p+3)A'(z)\,w^{(p+2)}(z)+\left((p+1)^2A''(z)-4B(z)\right)w^{(p+1)}(z)+(2p+1)(p+\nu+1)(p-\nu)\,k^2w^{(p)}(z)=0
\end{aligned}
$$

Pour obtenir ce résultat on doit tenir compte du degré maximal des polynômes A(z) et B(z), respectivement 3 et 1 et également par l'application de la formule de Leibniz pour les dérivées d'un produit de fonctions. A cet égard on aura comme application de la formule de Leibniz:

$$
g\ \textit{polynôme de degré} \leq 3 \quad (f\,g)^{(p)}=f^{(p)}g+p\,f^{(p-1)}g'+\frac{p(p-1)}{2}f^{(p-2)}g''+\frac{p(p-1)(p-2)}{6}f^{(p-3)}g^{(3)}
$$

$$
\begin{cases}
\left(w^{(3)}(z)A(z)\right)^{(p)}=A\,w^{(p+3)}+p\,A'\,w^{(p+2)}+\dfrac{p(p-1)}{2}A''w^{(p+1)}+\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}A^{(3)}w^{(p)}\\
\left(w^{(2)}(z)A'(z)\right)^{(p)}=A'\,w^{(p+2)}+p\,A''w^{(p+1)}+\dfrac{p(p-1)}{2}A^{(3)}w^{(p)}\\
\left(w^{(1)}(z)A''(z)\right)^{(p)}=w^{(p+1)}A''+p\,A^{(3)}w^{(p)} \qquad\qquad A^{(3)}=6k^2 \quad B'=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}k^2\\
\left(w^{(1)}(z)B(z)\right)^{(p)}=B\,w^{(p+1)}+p\,B'w^{(p)}\\
\left(w(z)B'(z)\right)^{(p)}=B'w^{(p)}
\end{cases}
$$

Ce qui entraîne que la p-ième dérivée de l'expression devient l'expression donnée ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
&\left(2A(z)\,w^{(3)}(z)+3A'(z)\,w^{(2)}(z)+A''(z)\,w^{(1)}(z)-4B(z)\,w^{(1)}(z)-2B'(z)\,w(z)\right)^{(p)}=\\
&2A\,w^{(p+3)}+(2p+3)A'w^{(p+2)}+\left((p+1)^2A''-4B\right)w^{(p+1)}+\left(2p(p-1)(p-2)+9p(p-1)+6p-\nu(\nu+1)(2p+1)\right)k^2w^{(p)}=0
\end{aligned}
$$

Lorsque p=v alors le terme de dérivée p-ième de l'équation s'annule ce qui a pour conséquence que la solution $w^{(p)}(z)=Cste$ *est bien une solution de cette équation car toutes ses dérivées suivantes sont nulles. Or* $w^{(p)}(z)=Cste$ *indique que la fonction w(z) est bien un polynôme de degré p et en l'occurrence de degré v. Pour obtenir la même condition, un procédé similaire consiste à considérer le terme maximal du polynôme recherché (un monôme par exemple) du p-ième degré* z^p*, il vient :*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Terme}\quad z^3\quad de\quad A(z)\rightarrow k^2\\
&\textit{Terme}\quad z\quad de\quad B(z)\rightarrow\frac{\nu(\nu+1)k^2}{2}\\
&E(z)=2A(z)\,w^{(3)}(z)+3A'(z)\,w^{(2)}(z)+A''(z)\,w^{(1)}(z)-2B'(z)\,w(z)-4B(z)\,w^{(1)}(z)=0\\
&\textit{Terme}\quad z^p\quad de\quad E(z)\rightarrow 2k^2p(p-1)(p-2)+3\times3\times k^2p(p-1)+3\times2k^2\times p-\nu(\nu+1)k^2-2\nu(\nu+1)k^2p\\
&\Rightarrow k^2\left(2p(p-1)(p-2)+9p(p-1)+6p-(2p+1)\nu\,(\nu+1)\right)=0
\end{aligned}
$$

C'est évidemment la même factorisation que celle obtenue par C.Hermite. En considérant son annulation on obtient le même résultat. Si ce monôme est placé dans l'équation différentielle du troisième degré et qu'elle est dérivée p fois alors tous les autres termes de dérivée sont des dérivées d'ordre strictement supérieur à p donc elles s'annulent (même argument que C.Hermite).

<u>Constructions des solutions de l'équation de Lamé et de Heun par quadrature, méthode de Hermite-Darboux</u>

A ce stade on sait donc qu'il existe un polynôme de degré entier v qui est le produit de deux solutions indépendantes de l'équation de Lamé (ou Heun). Deux questions se posent alors :

- *comment former les deux solutions de l'équation de Lamé (ou Heun)*
- *comment calculer le polynôme de degré entier v*

Pour ce qui est de la construction de deux solutions indépendantes suivons le procédé évoqué par C.Hermite. Les deux solutions y_1 et y_2 de l'équation sont liées par une relation du Wronskien :

$$\frac{d}{dz}Log\left(y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)\right)=\frac{d}{dz}Log\left(\frac{1}{\sqrt{A(z)}}\right)\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)=\frac{C}{\sqrt{A(z)}}$$

Soit d'autre part le polynôme w(t) solution de l'équation du troisième degré :

$$\begin{aligned}
&w(z)=y_1(z)y_2(z)\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)+y'_2(z)y_1(z)=w'(z)\\
&\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)+\frac{C}{\sqrt{A(z)}}\right)\qquad y'_2(z)y_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)-\frac{C}{\sqrt{A(z)}}\right)\\
&\Rightarrow \frac{y'_1(z)}{y_1(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)}+\frac{C}{w(z)\sqrt{A(z)}}\right)\qquad \frac{y'_2(z)}{y_2(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)}-\frac{C}{w(z)\sqrt{A(z)}}\right)\\
&\Rightarrow y_{1,2}(z)=G\,e^{\frac{1}{2}\left(Log(w(z))\pm C\int^z\frac{dt}{w(t)\sqrt{A(t)}}\right)}=G\sqrt{w(z)}\,e^{\pm\frac{C}{2}\int^z\frac{dt}{w(t)\sqrt{A(t)}}}
\end{aligned}$$

Si l'on doit se référer à l'équation de Heun plus générale et si l'on arrive à montrer qu'il existe un polynôme w(t) produit de deux solutions indépendantes de l'équation de Heun, on aura par le même procédé w(t) solution de l'équation différentielle du troisième degré :

$$w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+\left(4p(z)q(z)+2q'(z)\right)w(z)=0$$

Alors les deux solutions indépendantes y_1 et y_2 sont également reliées par une relation du Wronskien obtenues en modifiant légèrement l'équation différentielle de départ :

$$\begin{cases}p(z)=\dfrac{\gamma_1}{z-a_1}+\dfrac{\gamma_2}{z-a_2}+\dfrac{\gamma_3}{z-a_3}\\ q(z)=\dfrac{\alpha\,\beta\,z-q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\end{cases}\Rightarrow y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$$

$$f(z)=(z-a_1)^{\gamma_1}(z-a_2)^{\gamma_2}(z-a_3)^{\gamma_3}\Rightarrow p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow f(z)y''(z)+f'(z)\,y'(z)+f(z)q(z)\,y(z)=0\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(f(z)\,y'(z)\right)=-f(z)\,q(z)\,y(z)$$

Pour les deux solutions indépendantes y_1 et y_2 , il vient donc :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\dfrac{d}{dz}Log\left(y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)\right)=\dfrac{d}{dz}Log\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)=\dfrac{C}{f(z)}\\ y_2(z)y'_1(z)+y'_2(z)y_1(z)=w'(z)\end{cases}\\
&\Rightarrow y_2(z)y'_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)+\frac{C}{f(z)}\right)\qquad y'_2(z)y_1(z)=\frac{1}{2}\left(w'(z)-\frac{C}{f(z)}\right)\Rightarrow\frac{y'_{1,2}(z)}{y_{1,2}(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(z)}{w(z)}\pm\frac{C}{w(z)f(z)}\right)\\
&\Rightarrow y_{1,2}(z)=G\,e^{\frac{1}{2}\left(Log(w(z))\pm C\int^z\frac{dt}{w(t)f(t)}\right)}=G\sqrt{w(z)}\,e^{\pm\frac{C}{2}\int^z\frac{dt}{w(t)f(t)}}
\end{aligned}$$

Soit formellement l'expression des deux solutions indépendantes, en supposant la constante G comme étant égale à 1 : $y_{1,2}(z)=\sqrt{w(z)}\,e^{\pm\frac{C}{2}\int^z dt\frac{(t-a_1)^{-\gamma_1}(t-a_2)^{-\gamma_2}(t-a_3)^{-\gamma_3}}{w(t)}}$*. La question de la détermination du polynôme w(z) reste entière.*

Mais indépendamment de la détermination de ce polynôme, nous allons voir qu'il est possible de déterminer la constante d'intégration C, question qui reste entière. Pour cela revenons à l'expression de l'équation du troisième degré et trouvons un <u>invariant</u> de cette dernière par intégration directe :

$$E(z)=w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+2\left(2p(z)\,q(z)+q'(z)\right)w(z)=0$$

$$\text{Posons}\quad I(z)=2w(z)\,w''(z)-\left(w'(z)\right)^2+2p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\left(w(z)\right)^2 \qquad \text{il vient}\rightarrow \frac{1}{2w(z)}\left(\frac{d}{dz}\left(I(z)\right)+2I(z)p(z)\right)=E(z)$$

$$\text{D'où}\quad E(z)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left(I(z)\right)+2I(z)p(z)=0 \qquad \text{Or}\quad f(z)=(z-a_1)^{\gamma_1}(z-a_2)^{\gamma_2}(z-a_3)^{\gamma_3}\quad p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\gamma_1}{z-a_1}+\frac{\gamma_2}{z-a_2}+\frac{\gamma_3}{z-a_3}$$

$$\Leftrightarrow f(z)\frac{d}{dz}\left(I(z)\right)+2I(z)f'(z)=0\Leftrightarrow\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}\left(f(z)^2I(z)\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left(f(z)^2I(z)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow v^2=f(z)^2I(z)=\text{un invariant (constante)}\quad\Leftrightarrow v^2=(z-a_1)^{2\gamma_1}(z-a_2)^{2\gamma_2}(z-a_3)^{2\gamma_3}\left(2w(z)w''(z)-\left(w'(z)\right)^2+2p(z)w(z)w'(z)+4\,q(z)\left(w(z)\right)^2\right)$$

On a donc trouvé un invariant, noté v^2 par convention, par l'intégration de l'équation du troisième degré. Comme tout invariant il est constant quelque soit les valeurs de z. Choisissons une valeur z_0 telle que la fonction $y_1(z_0)$ s'annule et donc dans le même temps le produit suivant s'annule $w(z_0)=y_1(z_0)y_2(z_0)=0$. Alors la valeur de la constante v^2 devient :

$$z_0\quad\text{tel que}\quad y_1(z_0)=0\quad y_2(z_0)\neq0\rightarrow w(z_0)=0\quad w'(z_0)=y_1'(z_0)y_2(z_0)$$

$$\Rightarrow v^2=-(z_0-a_1)^{2\gamma_1}(z_0-a_2)^{2\gamma_2}(z_0-a_3)^{2\gamma_3}\left(w'(z_0)\right)^2=-(z_0-a_1)^{2\gamma_1}(z_0-a_2)^{2\gamma_2}(z_0-a_3)^{2\gamma_3}\left(y_1'(z_0)y_2(z_0)\right)^2$$

$$\Rightarrow v^2=-f(z_0)^2\left(y_1'(z_0)y_2(z_0)\right)^2$$

Or l'on a vu que : $y_2(z)y'_1(z)-y'_2(z)y_1(z)=\dfrac{C}{f(z)}\Rightarrow y_2(z_0)y'_1(z_0)=\dfrac{C}{f(z_0)}$

$$\Rightarrow C=f(z_0)y_2(z_0)y'_1(z_0)\Rightarrow v^2=-C^2\Rightarrow C=\pm i\,v$$

On peut donc écrire formellement que :

$$C^2=-v^2=-(z-a_1)^{2\gamma_1}(z-a_2)^{2\gamma_2}(z-a_3)^{2\gamma_3}\left(2w(z)w''(z)-\left(w'(z)\right)^2+2p(z)w(z)w'(z)+4\,q(z)\left(w(z)\right)^2\right)$$

Et les deux solutions indépendantes s'écrivent : $y_{1,2}(z)=\sqrt{w(z)}\,e^{\pm i\frac{v}{2}\times\int^{z}dt\frac{(t-a_1)^{-\gamma_1}(t-a_2)^{-\gamma_2}(t-a_3)^{-\gamma_3}}{w(t)}}$

On a donc déterminé la constante d'intégration C à travers l'invariant v, ce qui est le résultat établi par A.O.Smirnov dans son article « Elliptic Solitons and Heun's equation », mais en utilisant exactement la méthode donné par C.Hermite dans sa communication de 1877 extrait d'une lettre à F.Brioschi, « Sur l'équation de Lamé ».

Cette méthode de quadrature peut se généraliser pour une équation fuschienne (ou non-fuschienne) à p points singuliers réguliers à distance finie et de la forme :

$$\text{Equation fuschienne}\quad \begin{cases} y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V_{N-2}(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0 \\ p(z)=\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\quad q(z)=\frac{V_{N-2}(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)} \end{cases}\quad \text{ou plus généralement}\quad y''(z)+\frac{f'(z)}{f(z)}\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$$

$$w(z)=y_1(z)y_2(z)\Rightarrow w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+\left(4p(z)q(z)+2q'(z)\right)w(z)=0$$

$$f(z)=\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{\gamma_l}\Rightarrow p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow y_{1,2}(z)=\sqrt{w(z)}\,e^{\pm i\frac{\nu}{2}\times\int_z dt\frac{\prod_{l=1}^{l=p}(t-a_l)^{-\gamma_l}}{w(t)}}$$

$$\nu^2=\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{2\gamma_l}\left(2\,w(z)\,w''(z)-(w'(z))^2+2\,p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\,(w(z))^2\right)$$

Évidemment dans l'hypothèse où l'on peut construire « facilement » la fonction « produit » w(z) solution de l'équation différentielle du troisième degré, par exemple comme un polynôme en z, alors pour cette dernière hypothèse les conditions d'existence du polynôme ne sont pas toujours triviales à déterminer. Il en est de même si la solution « produit » est analytique sur le plan complexe (cas de la forme algébrique de l'équation de Mathieu qui au passage n'est pas une équation fuschienne).

Remarque : que se passe-t-il lorsque la constante d'intégration v s'annule ? En effet il est possible que pour un jeu de paramètre interne à l'équation fuschienne une relation existe entre ces derniers qui annule la constante v. Dans ce cas de part la construction les deux solutions ne sont plus indépendantes et s'expriment directement par la racine carrée de la solution « produit » à savoir :

$$\nu^2=f(z)\left(2\,w(z)\,w''(z)-(w'(z))^2+2\,p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\,(w(z))^2\right)=0\Rightarrow y(z)=\sqrt{w(z)}$$

Revenons en à une autre formule connue du Wronskien de deux solutions indépendantes de l'équation fuschienne :

$$y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0\quad avec\quad p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$W(z)=y_1'(z)y_2(z)-y_1(z)y_2'(z)\Rightarrow W'(z)+p(z)W(z)=0\Rightarrow W(z)=Cste\times e^{-\int dt\,p(t)}$$

$$Or\quad p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow p(z)=\left(Log(f(z))\right)^{(1)}\Rightarrow W(z)=e^{-\int dt\,p(t)}=\frac{Cste}{f(z)}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right)=-\frac{W(z)}{(y_1(z))^2}\Rightarrow\frac{y_2(z)}{y_1(z)}=Cste\times\int_z dt\,\frac{1}{(y_1(t))^2 f(t)}$$

Cette formule permet de construire formellement une seconde solution indépendante de la première. Si l'on se restreint à des arguments réels l'intégration se réalise sur tout domaine où l'intégrale indéfinie existe. En prenant pour $y_1(z)$ la solution « produit » w(z), il vient alors :

$$\begin{cases} y_1(z)=\sqrt{w(z)} \\ y_2(z)=\sqrt{w(z)}\times\int_z dt\,\frac{1}{w(t)f(t)} \end{cases}$$

Détermination du polynôme « produit » de Darboux-Hermite pour l'équation de Lamé et de Heun

Passons maintenant à la détermination du polynôme « produit » w(z) soit pour l'équation de Lamé soit pour celle de Heun. Et pour cela commençons par le cas le plus simple : celui de l'équation de Lamé. En effet dans l'équation du troisième degré liée à une équation fuschienne générale à trois points singuliers réguliers :

$$w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+2\left(2p(z)\,q(z)+q'(z)\right)w(z)=0$$

Nous voyons que le cas particulier de l'équation de Lamé, donne une équation différentielle du troisième degré spécifique :

$$p(z)=\frac{\gamma_1}{z-a_1}+\frac{\gamma_2}{z-a_2}+\frac{\gamma_3}{z-a_3}\rightarrow p'(z)=-\frac{\gamma_1}{(z-a_1)^2}-\frac{\gamma_2}{(z-a_2)^2}-\frac{\gamma_3}{(z-a_3)^2}\qquad q(z)=\frac{q_1(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$

$$q_1(z)=\alpha\;\beta\;z-q\quad \textit{polynôme de degré}\quad 1\qquad q_1'(z)=\alpha\beta$$

$$\Rightarrow(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)p(z)=\gamma_1(z-a_2)(z-a_3)+\gamma_2(z-a_1)(z-a_3)+\gamma_3(z-a_1)(z-a_2)\quad \textit{polynôme de degré}\quad 2$$

$$p^2(z)=\frac{\gamma_1^{\;2}}{(z-a_1)^2}+\frac{\gamma_2^{\;2}}{(z-a_2)^2}+\frac{\gamma_3^{\;2}}{(z-a_3)^2}+\frac{2\gamma_1\gamma_2}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{2\gamma_2\gamma_3}{(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{2\gamma_1\gamma_3}{(z-a_1)(z-a_3)}$$

$$p'(z)+2p^2(z)=\frac{\gamma_1(2\gamma_1-1)}{(z-a_1)^2}+\frac{\gamma_2(2\gamma_2-1)}{(z-a_2)^2}+\frac{\gamma_3(2\gamma_3-1)}{(z-a_3)^2}+\frac{4\gamma_1\gamma_2}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{4\gamma_2\gamma_3}{(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{4\gamma_1\gamma_3}{(z-a_1)(z-a_3)}$$

$$\Rightarrow(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\left(p'(z)+2p^2(z)\right)\quad \textit{polynôme de degré}\quad 1\quad \textit{si}\quad 2\gamma_1-1=2\gamma_1-1=2\gamma_1-1=0$$

$$\textit{si}\quad 2\gamma_1-1=2\gamma_2-1=2\gamma_3-1=0\rightarrow(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\left(p'(z)+2p^2(z)\right)=z-a_1+z-a_2+z-a_{"}$$

$$2p(z)q(z)+q'(z)=\left(\frac{2\gamma_1}{z-a_1}+\frac{2\gamma_2}{z-a_2}+\frac{2\gamma_3}{z-a_3}\right)\frac{q_1(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{\alpha\beta}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}-\frac{q_1(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\left(\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\frac{1}{z-a_3}\right)$$

$$2p(z)q(z)+q'(z)=\left(\frac{2\gamma_1-1}{z-a_1}+\frac{2\gamma_2-1}{z-a_2}+\frac{2\gamma_3-1}{z-a_3}\right)\frac{q_1(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{\alpha\beta}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$

$$\Rightarrow(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\left(2p(z)q(z)+q'(z)\right)\quad \textit{polynôme de degré}\quad 0\quad \textit{si}\quad 2\gamma_1-1=2\gamma_1-1=2\gamma_1-1=0$$

Pour l'équation de Lamé, lorsque l'équation dîtes au produit s'écrit dans sa forme originale :

$$\begin{aligned}&(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\,w^{(3)}(z)+\\&+\frac{3}{2}\left((z-a_2)(z-a_3)+(z-a_1)(z-a_3)+(z-a_1)(z-a_2)\right)w''(z)+\\&+\left(3z-a_1-a_2-a_3+4(\alpha\;\beta\;z-q)\right)w'(z)+\\&+2\;\alpha\;\beta\;w(z)=0\end{aligned}$$

alors la condition pour que la solution du produit soit un polynôme consiste en l'annulation du terme en z^p du monôme de la forme $w(z)=z^p+\sum_{l=0}^{l=p-1}a_l z^l$ *:*

$$\textit{Terme}\quad z^p\rightarrow p(p-1)(p-2)+\frac{9}{2}p(p-1)+3p+2(2p+1)\alpha\;\beta=0\quad \textit{sachant que}\quad \alpha+\beta=\frac{1}{2}\leftarrow \textit{relation de Fuchs}$$

$$\Rightarrow\frac{p(p+1)(2p+1)}{2}+2(2p+1)\alpha\;\beta=\frac{(2p+1)}{2}\left(p(p+1)+2\alpha(1-2\alpha)\right)=\frac{(2p+1)}{2}(p+2\alpha)(p+1-2\alpha)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{p}{2}\\ \beta=\dfrac{p+1}{2}\end{cases}\quad ou\quad\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+1}{2}\\ \beta=-\dfrac{p}{2}\end{cases}$$

Les p autres conditions d'annulation des termes de puissance de z permettent d'obtenir tous les coefficients du polynômes « produit ». Si l'on formalise le système d'équations linéaires obtenu sur les coefficients du monôme par annulation de chaque terme successif de puissance de z, il suffit d'inverser une matrice pour calculer ces coefficients car le système n'est ni sous-déterminé ni sur-déterminé :

$$\alpha = -\frac{p}{2} \quad w(z) = z^p + \sum_{l=0}^{l=p-1} a_l z^l \rightarrow l \in \{0, p-1\} \quad \sum_{i=0}^{i=p-1} c_{li} a_i + c_{lp} = 0$$
$$\rightarrow \sum_{i=0}^{i=p-1} c_{li} a_i = -c_{lp} \qquad \mathbf{A} = [a_i] \quad \mathbf{C} = [c_{li}] \quad \mathbf{D} = [-c_{lp}] \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}.\,\mathbf{D}$$

Voyons ce qu'il en est avec des paramètres quelconques de l'équation de Heun. Et dans un premier temps éliminons le dénominateur commun dans l'équation différentielle du troisième degré par la multiplication du facteur $(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2$ *, il vient :*

$$p(z) = \frac{\gamma_1}{z-a_1} + \frac{\gamma_2}{z-a_2} + \frac{\gamma_3}{z-a_3} \rightarrow p'(z) = -\frac{\gamma_1}{(z-a_1)^2} - \frac{\gamma_2}{(z-a_2)^2} - \frac{\gamma_3}{(z-a_3)^2} \qquad q(z) = \frac{\alpha\,\beta\,z - q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$
$$\Rightarrow (z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2\,p(z) = \gamma_1(z-a_1)(z-a_2)^2(z-a_3)^2 + \gamma_2(z-a_2)(z-a_1)^2(z-a_3)^2 + \gamma_3(z-a_3)(z-a_1)^2(z-a_2)^2 \quad \textit{polynôme de degré} \quad 5$$
$$p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z) = \frac{\gamma_1(2\gamma_1 - 1)}{(z-a_1)^2} + \frac{\gamma_2(2\gamma_2 - 1)}{(z-a_2)^2} + \frac{\gamma_3(2\gamma_3 - 1)}{(z-a_3)^2} + \frac{4\gamma_1\gamma_2}{(z-a_1)(z-a_2)} + \frac{4\gamma_2\gamma_3}{(z-a_2)(z-a_3)} + \frac{4\gamma_1\gamma_3}{(z-a_1)(z-a_3)} + \frac{4\,(\alpha\,\beta\,z - q)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$
$$\Rightarrow (z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2\left(p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z)\right) \quad \textit{polynôme de degré} \quad 4$$
$$2p(z)q(z) + q'(z) = \left(\frac{2\gamma_1 - 1}{z-a_1} + \frac{2\gamma_2 - 1}{z-a_2} + \frac{2\gamma_3 - 1}{z-a_3}\right)\frac{\alpha\,\beta\,z - q}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} + \frac{\alpha\,\beta}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$
$$\Rightarrow (z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2\left(2p(z)q(z) + q'(z)\right) \quad \textit{polynôme de degré} \quad 3$$

L'équation différentielle au « produit » devient alors :

$$E(z) = w^{(3)}(z) + 3p(z)\,w''(z) + \left(p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z)\right)w'(z) + 2\left(2p(z)\,q(z) + q'(z)\right)w(z) = 0$$
$$\textit{Posons} \quad E_N(z) = E(z)(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2$$
$$\Leftrightarrow E_N(z) = A_6(z)\,w^{(3)}(z) + A_5(z)\,w''(z) + A_4(z)\,w'(z) + A_3(z)\,w(z) = 0$$
$$A_6(z) = (z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2$$
$$A_5(z) \quad \textit{polynôme de degré} \quad 5$$
$$A_4(z) \quad \textit{polynôme de degré} \quad 4$$
$$A_3(z) \quad \textit{polynôme de degré} \quad 3$$

L'injection d'un terme polynomial en z^p donne un terme maximal de puissance en z^{p+3} :

$$\textit{Terme} \quad z^{p+3} \rightarrow p\,(p-1)(p-2) + 3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\,p\,(p-1) + p\left(2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)^2 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 4\,\alpha\,\beta\right) + 4\,\alpha\,\beta\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 1)$$
$$\textit{Comme} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha + \beta + 1 \leftarrow \textit{relation de Fuchs}$$
$$\textit{Terme} \quad z^{p+3} \rightarrow p(p-1)(p-2) + 3\,(\alpha + \beta + 1)p(p-1) + p\left(2(\alpha + \beta + 1)^2 - (\alpha + \beta + 1) + 4\,\alpha\,\beta\right) + 4\,\alpha\,\beta\,(\alpha + \beta) = (2\alpha + p)(\alpha + \beta + p)(2\beta + p)$$
$$\textit{Terme} \quad z^{p+3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{p}{2} \\ \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 1 + \dfrac{p}{2} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \alpha = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 1 + \dfrac{p}{2} \\ \beta = -\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

Remarque : par le même procédé que C.Hermite montrons que la solution de l'équation au « produit » est alors polynomiale en dérivant (p+3)-ième fois l'équation au « produit » normalisée sans dénominateur (on utilise la formule de Leibniz :

$$(f(z)g(z))^{(p)} = \sum_{i=0}^{i=p} C_p^i \times (f(z))^{(i)}(g(z))^{(p-i)}$$

Il vient :

$$\left(A_6(z)\,w^{(3)}(z)\right)^{(p+3)} = C_{p+3}^6 (A_6(z))^{(6)}(w(z))^{(p)} + \sum_{i=1}^{i=3} g_{3,i}(z)(w(z))^{(p+i)}$$
$$\left(A_5(z)\,w''(z)\right)^{(p+3)} = C_{p+3}^5 (A_5(z))^{(5)}(w(z))^{(p)} + \sum_{i=1}^{i=3} g_{2,i}(z)(w(z))^{(p+i)}$$
$$\left(A_4(z)\,w'(z)\right)^{(p+3)} = C_{p+3}^4 (A_4(z))^{(4)}(w(z))^{(p)} + \sum_{i=1}^{i=3} g_{1,i}(z)(w(z))^{(p+i)}$$
$$\left(A_3(z)\,w(z)\right)^{(p+3)} = C_{p+3}^3 (A_3(z))^{(3)}(w(z))^{(p)} + \sum_{i=1}^{i=3} g_{0,i}(z)(w(z))^{(p+i)}$$
$$g_{0,i}(z), g_{1,i}(z), g_{2,i}(z), g_{3,i}(z) \quad \textit{sont des polynômes en z}$$
$$(A_3(z))^{(3)}, (A_4(z))^{(4)}, (A_5(z))^{(5)}, (A_6(z))^{(6)} \quad \textit{sont des constantes}$$
$$\Rightarrow (E_N(z))^{(p+3)} = A_6(z)\,w^{(3)}(z) + A_5(z)\,w''(z) + A_4(z)\,w'(z) + A_3(z)\,w(z)$$
$$= \left(C_{p+3}^6 (A_6(z))^{(6)} + C_{p+3}^5 (A_5(z))^{(5)} + C_{p+3}^4 (A_4(z))^{(4)} + C_{p+3}^3 (A_3(z))^{(3)}\right)(w(z))^{(p)} + \sum_{i=1}^{i=3} \left(g_{3,i}(z) + g_{2,i}(z) + g_{1,i}(z) + g_{0,i}(z)\right)(w(z))^{(p+i)}$$

Alors l'expression $w^{(p)}(z) = Cste$ *est solution de cette équation car tous les termes de dérivée supérieure s'annulent* $i > 0 \rightarrow w^{(p+i)}(z) = 0$ *uniquement si l'expression suivante s'annule également :*

$$C_{p+3}^6 (A_6(z))^{(6)} + C_{p+3}^5 (A_5(z))^{(5)} + C_{p+3}^4 (A_4(z))^{(4)} + C_{p+3}^3 (A_3(z))^{(3)} = 0$$

Or cette expression n'est que la formalisation de la même expression obtenue en injectant le monôme z^p *comme précédemment. Cela prouve donc bien que* $w(z)$ *polynôme de degré p est une solution de l'équation « au produit » pour l'équation de Heun.*

Choisissons une forme particulière des paramètres $\gamma_1 = \frac{1-2m_1}{2} \quad \gamma_2 = \frac{1-2m_2}{2} \quad \gamma_3 = \frac{1-2m_3}{2}$ *de telle façon que* m_1*,* m_2 *et* m_3 *sont des entiers positifs, soit que les paramètres soit tous des demi-entiers ou des entiers.*

On peut alors également éliminer le dénominateur commun dans l'équation au « produit » par la multiplication d'un facteur réduit de la forme : $(z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}$.

Avec cette paramétrisation, il vient :

$$(z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}\,p(z)=$$
$$\gamma_1(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}+\gamma_2(z-a_2)(z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_3)^2+\gamma_3(z-a_3)(z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^2$$
$$\rightarrow \textit{polynôme de degré} \quad 5-6+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)=-1+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)$$
$$p'(z)+2p^2(z)+4q(z)=-\frac{(1-2m_1)\,m_1}{(z-a_1)^2}-\frac{(1-2m_2)\,m_2}{(z-a_2)^2}-\frac{(1-2m_3)\,m_3}{(z-a_3)^2}+\frac{(1-2m_1)(1-2m_2)}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{(1-2m_2)(1-2m_3)}{(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{(1-2m_1)(1-2m3)}{(z-a_1)(z-a_3)}+\frac{4\,(\alpha\;\beta\;z-q)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$
$$\Rightarrow (z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)$$
$$\rightarrow \textit{polynôme de degré} \quad 4-6+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)=-2+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)$$
$$2p(z)\,q(z)+q'(z)=-\left(\frac{2m_1}{z-a_1}+\frac{2m_3}{z-a_2}+\frac{2m_3}{z-a_3}\right)\frac{(\alpha\;\beta\;z-q)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{\alpha\;\beta}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$$
$$\Rightarrow (z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}\left(2p(z)q(z)+q'(z)\right)$$
$$\rightarrow \textit{polynôme de degré} \quad 3-6+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)=-3+\sum_{l=1}^{l=3}Min(2,1+m_l)$$

Lorsque l'équation de Heun est paramétrée de la manière suivante alors c'est la somme des paramètres entiers $m_0+m_1+m_2+m_3$ *qui détermine le degré du polynôme à choisir :*

$$\gamma_1 = \frac{1-2m_1}{2} \qquad \gamma_2 = \frac{1-2m_2}{2} \qquad \gamma_3 = \frac{1-2m_3}{2}$$
$$4\,\alpha\;\beta = -(m_0+m_1+m_2+m_3)(m_0+1-m_1-m_2-m_3) \quad \begin{cases} 2\alpha = -p = -(m_0+m_1+m_2+m_3) \Leftrightarrow p = m_0+m_1+m_2+m_3 \\ 2\beta = p+1-2(m_1+m_2+m_3) = m_0+1-(m_1+m_2+m_3) \end{cases}$$
$$y''(x)+\left\{\frac{1-2m_1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1-2m_2}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1-2m_3}{2}\frac{k^2}{k^2x-1}\right\}y'(x)+\frac{\lambda-(m_0+m_1+m_2+m_3)(m_0+1-m_1-m_2-m_3)\,k^2x}{4x(1-x)(1-k^2x)}\,y(x)=0$$

ou bien encore de manière équivalente la paramétrisation utilisé par A.O.Smirnov dans « ELLIPTIC SOLITONS AND HEUN'S EQUATION » :

$$\gamma_1 = \frac{1-2m_1}{2} \qquad \gamma_2 = \frac{1-2m_2}{2} \qquad \gamma_3 = \frac{1-2m_3}{2}$$
$$4\,\alpha\;\beta = -(m_0+m_1+m_2+m_3)(m_0+1-m_1-m_2-m_3) \quad \begin{cases} 2\alpha = -p = -(m_0+m_1+m_2+m_3) \Leftrightarrow p = m_0+m_1+m_2+m_3 \\ 2\beta = p+1-2(m_1+m_2+m_3) = m_0+1-(m_1+m_2+m_3) \end{cases}$$
$$y''(x)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1-2m_1}{x}+\frac{1-2m_2}{x-1}+\frac{1-2m_3}{x-a}\right\}y'(x)+\frac{\lambda-(m_0+m_1+m_2+m_3)(m_0+1-m_1-m_2-m_3)\,x}{4\,x\,(x-1)(x-a)}\,y(x)=0$$

Donc l'injection d'un monôme de degré N=$m_0+m_1+m_2+m_3$ dans l'équation du troisième degré (multiplié par le facteur $(z-a_1)^{Min(2,1+m_1)}(z-a_2)^{Min(2,1+m_2)}(z-a_3)^{Min(2,1+m_3)}$*) donne un terme maximal de degré* $N-3+\sum_{l=1}^{l=3} Min(2,1+m_l)=N+\sum_{l=1}^{l=3} Min(1,m_l)$ *qui s'annule automatiquement. Et l'annulation de tous les autres termes de puissance de z donne un système linéaire sur les coefficients du polynôme injecté. Dans le cas de l'équation de Lamé l'équation aux produits conduisait à un système de N équations linéaires avec les N coefficients du polynôme inconnus. Il s'agissait d'un système parfaitement déterminé. Par contre lorsque les paramètres* m_1,m_2,m_3 *sont non simultanément nuls alors on arrive à un système de* $N+\sum_{l=1}^{l=3} Min(1,m_l)$ *équations linéaires pour N inconnus restant et qui s'avère donc sur-déterminé (plus d'équations que d'inconnus). En d'autres termes et comme l'indique Gaston Darboux dans son article, il s'agit de démontrer formellement qu'un certain nombre d'équations sont dépendantes des autres. En 1882 le fameux Gaston Darboux « annonce » : « Il est évident, a priori, et il est possible de démontrer que trois de ses conditions sont la conséquence des autres. Il suffit, pour cela, de s'appuyer sur les propriétés des points singuliers de la nouvelle équation en u, propriétés qui sont des conséquences de celles qui ont été démontrées relativement à l'équation (1) ». La nouvelle équation en u fait référence à l'équation différentielle du troisième degré. Et l'équation (1) fait référence à l'équation de Heun en forme potentielle elliptique.*

$$Y''(\mu)-\left\{m_1(m_1+1)\frac{1}{sn^2(\mu,k)}+m_2(m_2+1)\frac{dn^2(\mu,k)}{cn^2(\mu,k)}+m_3(m_3+1)k^2\frac{cn^2(\mu,k)}{dn^2(\mu,k)}+k^2m_0(m_0+1)sn^2(\mu,k)-\lambda-(m_1+m_2)^2+k^2(m_1+m_3)^2\right\}Y(\mu)=0$$

Tout cela me paraît obscure probablement par manque de compétence. Pour autant lorsque l'on construit le système d'équations linéaires sur-déterminé à l'aide Mathematica force est de constater qu'il possède bien à chaque fois une solution déterminée.

Aussi c'est avec les résultats de Mathematica que je vais présenter des solutions polynomiales concrètes avec le jeu de paramètres entiers m_0,m_1,m_2,m_3*.*

Diverses déterminations simples dans le cas de l'équation de Lamé (récurrence du polynôme produit, constante v^2)

L'équation « au produit » dans le cas de l'équation de Lamé sous forme algébrique :

$$w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+2\times\left(2p(z)\,q(z)+q'(z)\right)w(z)=0$$
$$p(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-a}\right)$$
$$q(z)=\frac{\lambda-m_0\,(m_0+1)\,z}{4\,z\,(z-1)(z-a)}$$

s'exprime sous la forme :

$$z\,(z-1)(z-a)w^{(3)}(z)+\frac{3}{2}\left(a-2az+z(3z-2)\right)w''(z)+\left(\lambda-a-1-z\,(m_0(m_0+1)-3)\right)w'(z)-\frac{1}{2}\,m_0(m_0+1)\,w(z)=0$$

Avec le développement de la solution w(z) sous la forme : $w(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n$ *les coefficients sont liés par une récurrence à trois termes :*

$$A_n c_{n-1}+B_n c_n+C_n c_{n+1}=0$$
$$\begin{cases}A_n=(2n-1)(n+m_0)(n-m_0-1)\\ B_n=2n\lambda-2n^3(a+1)\\ C_n=a\,n(n+1)(2n+1)\end{cases}$$

Cette récurrence met bien en évidence une forme polynomiame d'une part parce que les termes d'indice négatif sont tous nuls puisque C_{-1}=0, et d'autre part tous les termes pour lesquels $n>m_0$ s'annulent aussi puisque A_{m_0+1}=0. La solution w(z) étant bien un polynôme, la constante peut se déterminer simplement en calculant la limite de l'expression lorsque x->0 :

$$p(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-a}\right)\qquad q(x)=\frac{\lambda-m_0(m_0+1)\,x}{4\,x\,(x-1)(x-a)}\qquad w(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$$
$$w(0)=c_0\qquad w'(0)=c_1$$
$$v^2(\lambda)=\lim_{x\to 0}\ x\,(x-1)(x-a)\left(2\,w(x)\,w''(x)-(w'(x))^2+2\,p(x)\,w(x)\,w'(x)+4\,q(x)\,(w(x))^2\right)$$
$$\Rightarrow v^2(\lambda)=\lim_{x\to 0}\ \left(2\,x\,(x-1)(x-a)p(x)\,w(0)\,w'(0)+4\,x\,(x-1)(x-a)q(x)\,(w(x))^2\right)=a\,c_0c_1+\lambda\,c_0^{\,2}$$
$$\Rightarrow v^2(\lambda)=c_0(\lambda\,c_0+a\,c_1)=c_0^{\,2}\times\left(\lambda+a\times\frac{c_1}{c_0}\right)$$

Dans le cas d'une récurrence à trois termes on peut calculer explicitement les coefficients c_0 et c_1 , comme ceci . Supposons que la récurrence à trois termes s'écrivent sous une forme équivalente $v_{n+1}c_{n+2}=-u_nc_{n+1}+c_n$ *avec la correspondance de paramètres :*

$$A_nc_{n-1}+B_nc_n+C_nc_{n+1}=0\Rightarrow u_n=-\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\qquad et\qquad v_n=-\frac{C_n}{A_n}$$

En introduisant les fractions successives : $\frac{c_n}{c_{n+1}}$*, la relation de récurrence peut s'écrire :* $\frac{c_n}{c_{n+1}}=u_n+\frac{v_{n+1}}{\frac{c_{n+1}}{c_{n+2}}}$

Cela permet d'exprimer la relation de récurrence comme une fraction continue.

Pour calculer la valeur limite de cette fraction continue, introduisons les déterminants suivants de taille (l-n+1,l-n+1= avec l >= n dans tous les cas :

$$n < l \quad K(n,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{v_{n+1}}{u_n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -u_{n+1}^{-1} & 1 & \frac{v_{n+2}}{u_{n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -u_{n+2}^{-1} & 1 & \frac{v_{n+3}}{u_{n+2}} & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \frac{v_l}{u_{l-1}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -u_l^{-1} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l-1,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{v_l}{u_{l-1}} \\ -u_l^{-1} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l,l) = 1$$

Alors les déterminants K(n,l) suivent la relation de récurrence suivante :

$$K(n,l) = K(n+1,l) + \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}u_n}K(n+2,l) \Rightarrow \frac{K(n,l)}{K(n+1,l)} = 1 + \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}u_n\frac{K(n+1,l)}{K(n+2,l)}} \Rightarrow u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)} = u_n + \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}\frac{K(n+1,l)}{K(n+2,l)}}$$

Donc la séquence $u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}$ *suit exactement la même récurrence que la fraction* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ *et donc en conséquence la fraction* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ *est égale à l'expression* $u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}$ *à une constante multiplicative près. Imaginons que la récurrence est limitée à l=*m_0 *termes ce qui est notre cas ici. Cela signifie notamment que dans l'expression de la récurrence :* $A_nc_{n-1} + B_nc_n + C_nc_{n+1} = 0$ *le terme* A_{m_0+1} *s'annule et donc que le développement devient strictement polynomial car tous les termes pour n >* m_0 *s'annulent. Alors si nous calculons la dernière fraction possible :*

$$u_{m_0-1}\frac{K(m_0-1,m_0)}{K(m_0,m_0)} = u_{m_0-1}K(m_0-1,m_0) = u_{m_0-1}\times\left(1 + \frac{v_{m_0}}{u_{m_0-1}u_{m_0}}\right) = u_{m_0-1} + v_{m_0}u_{m_0}^{-1}$$

$$Or \quad u_{m_0}^{-1} = -\frac{A_{m_0+1}}{B_{m_0+1}} = 0 \Rightarrow u_{m_0-1}\frac{K(m_0-1,m_0)}{K(m_0,m_0)} = u_{m_0-1} = \frac{B_{m_0}}{A_{m_0}}$$

On voit la fraction $\frac{c_{l-1}}{c_l}$ *est égale à cette expression en écrivant la dernière relation de récurrence pour n=*m_0 *:* $A_{m_0}c_{m_0-1} + B_{m_0}c_{m_0} + C_{m_0}c_{m_0+1} = A_{m_0}c_{m_0-1} + B_{m_0}c_l = 0 \Rightarrow \frac{c_{m_0-1}}{c_{m_0}} = -\frac{B_{m_0}}{A_{m_0}} = u_{m_0-1}$*. Dans ce cas donc la constante multiplicative est bien égale à l'unité. Et nous écrirons donc précisément :*

$$\forall n \in (0,1,\dots,m_0-1) \quad \frac{c_n}{c_{n+1}} = u_n\frac{K(n,m_0)}{K(n+1,m_0)}$$

Pour une récurrence écrite comme initialement $A_n c_{n-1} + B_n c_n + C_n c_{n+1} = 0 \Rightarrow u_n = -\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}$ *et* $v_n = -\frac{C_n}{A_n}$

Alors les déterminants K(n,l) s'écrivent :

$$n < l \quad K(n,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} & 1 & \frac{C_{n+2}}{B_{n+2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{A_{n+3}}{B_{n+3}} & 1 & \frac{C_{n+3}}{B_{n+3}} & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \frac{C_l}{B_l} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l-1,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{C_l}{B_l} \\ \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l,l) = 1$$

Donc si nous en revenons à l'expression de la constante v^2 il vient en considérant $l=m_0$:

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{K(1,m_0)}{u_0 \times K(0,m_0)} \Rightarrow \nu^2 = c_0^{\,2} \times \left(\lambda + a\, \frac{c_1}{c_0} \right) = c_0^{\,2} \times \left(\lambda + a\, \frac{K(1,m_0)}{u_0 \times K(0,m_0)} \right)$$

Pour l'instant je n'ai pas encore trouvé d'expression aussi simple pour le cas de l'équation de Heun.

<u>Étude au point singulier z=0 de l'équation « au produit », cas de l'équation de Lamé</u>

L'équation « au produit » dans le cas de l'équation de Lamé sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} & w^{(3)}(z) + 3p(z)\, w''(z) + \left(p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z)\right) w'(z) + 2 \times \left(2p(z)\, q(z) + q'(z)\right) w(z) = 0 \\ & p(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-a} \right) \\ & q(z) = \frac{\lambda - m_0\,(m_0+1)\, z}{4\, z\,(z-1)(z-a)} \end{aligned}$$

s'exprime sous la forme :

$$z\,(z-1)(z-a) w^{(3)}(z) + \frac{3}{2}\left(a - 2az + z(3z-2)\right) w''(z) + \left(\lambda - a - 1 - z\,(m_0\,(m_0+1) - 3)\right) w'(z) - \frac{1}{2}\, m_0\,(m_0+1)\, w(z) = 0$$

Et l'équation indicielle de l'exposant ρ au point z=0 s'exprime comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} & p_0(z)\, w^{(3)}(z) + p_1(z)\, w''(z) + p_2(z)\, w'(z) + p_3(z)\, w(z) = 0 \\ & p_0(z) = z\,(z-1)(z-a) \\ & p_1(z) = \frac{3}{2}\left(a - 2a\, z + z\,(3z-2)\right) \\ & p_2(z) = \left(\lambda - a - 1 - z\,(m_0\,(m_0+1) - 3)\right) \\ & p_3(z) = -\frac{1}{2}\, m_0\,(m_0+1) \end{aligned} \right. \Rightarrow \textit{Equation indicielle} \quad \rho(\rho-1)(\rho-2) + \rho(\rho-1) I_1 + \rho\, I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 = \lim_{z \to a_1} z\, \frac{p_1(z)}{p_0(z)} = \frac{3}{2} \qquad I_2 = \lim_{z \to a_1} z^2\, \frac{p_2(z)}{p_0(z)} = 0 \qquad I_3 = \lim_{z \to a_1} z^3\, \frac{p_3(z)}{p_0(z)} = 0 \Rightarrow \rho(\rho-1)\left(\rho - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Les racines indicielles forment donc deux sous ensembles chacun disposé dans l'ordre inverse des valeurs :

$$\begin{cases} \rho_0 = 1 \quad \rho_2 = 0 \\ \rho_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dans le premier groupe les deux racines sont séparées par un entier et dans ce cas il y a présence possible d'un terme logarithmique dans le développement de Fröbenius pour l'indice ρ_2=0. Voyons si les conditions pour que ce terme logarithmique disparaisse sont remplies. D'après la théorie exposée par E.L.Ince il convient que $\mathbf{F}_1(\rho = 0) = f_1(0) = 0$. *L'expression de la fonction indicielle $f_1(\rho)$ est la suivante :* $f_1(\rho) = \dfrac{\rho}{2a}(2\lambda - (3\rho - 1)(a+1))$. *Dans ces conditions il n'y a pas présence de terme logarithmique dans la solution pour* $\rho = 0$ *et que la solution* $w(z) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *existe, ce qui est également confirmé par le fait qu'une solution polynomiale de l'équation « au produit » existe.*

Examinons maintenant le cas plus général de l'équation de Heun.

<u>Étude au point singulier z=0 de l'équation « au produit », cas de l'équation de Heun</u>

Pour retrouver l'expression de l'équation indicielle, il convient de multiplier par le dénominateur l'équation « au produit » :

$$w^{(3)}(z) + 3p(z)\, w''(z) + \left(p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z)\right) w'(z) + 2 \times \left(2p(z)\, q(z) + q'(z)\right) w(z) = 0$$
$$p(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a}\right) \qquad q(z) = \frac{\lambda - (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)(m_0 + 1 - m_1 - m_2 - m_3)}{4z(z-1)(z-a)}$$

afin de normaliser l'équation sous la forme : $p_0(z)\, w^{(3)}(z) + p_1(z)\, w''(z) + p_2(z)\, w'(z) + p_3(z)\, w(z) = 0$

Ici on choisit de représenter les termes l'équation différentielle « au produit » comme suit :

$$p(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a}\right) \qquad q(z) = \frac{\lambda - (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)(m_0 + 1 - m_1 - m_2 - m_3)}{4z(z-1)(z-a)}$$
$$p_0(z) = z^2 (z-1)^2 (z-a)^2$$
$$p_1(z) = 3 \times z^2 (z-1)^2 (z-a)^2 \times p(z)$$
$$p_2(z) = z^2 (z-1)^2 (z-a)^2 \left(p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z)\right)$$
$$p_3(z) = 2 \times z^2 (z-1)^2 (z-a)^2 \times \left(2p(z)\, q(z) + q'(z)\right)$$

Et l'équation indicielle de l'exposant ρ au point z=0 s'exprime comme suit :

$$p_0(z)\, w^{(3)}(z) + p_1(z)\, w''(z) + p_2(z)\, w'(z) + p_3(z)\, w(z) = 0$$
$$I_1 = \lim_{z \to 0} z\, \frac{p_1(z)}{p_0(z)} = \frac{3}{2}(1 - 2m_1) \qquad I_2 = \lim_{z \to 0} z^2\, \frac{p_2(z)}{p_0(z)} = -m_1(1 - 2m_1) \qquad I_3 = \lim_{z \to a_1} (z - a_1)^3\, \frac{p_3(z)}{p_0(z)} = 0$$
$$\Rightarrow \text{Equation indicielle} \quad \rho(\rho-1)(\rho-2) + \rho(\rho-1) I_1 + \rho\, I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{2} \times (\rho - 1 - 2m_1) \times (2\rho - 1 - 2m_1) = 0$$

Les racines indicielles forment donc deux sous ensembles chacun disposé dans l'ordre inverse des valeurs :

$$\begin{cases} \rho_0 = 1 + 2m_1 \quad \rho_2 = 0 \\ \rho_2 = \frac{1}{2}(1 + 2m_1) \end{cases}$$

Dans le premier groupe les deux racines sont séparées par un entier et dans ce cas il y a présence possible d'un terme logarithmique dans le développement de Fröbenius pour l'indice ρ_2=0. Voyons si les conditions pour que ce terme logarithmique disparaisse sont remplies. D'après la théorie exposée par E.L.Ince :

$$\mathbf{F}_{1+2m_1}(\rho = 0) = \begin{bmatrix} f_1(2m_1) & f_2(2m_1 - 1) & f_3(2m_1 - 2) & \ldots & f_{2m_1}(1) & f_{2m_1+1}(0) \\ f_0(2m_1) & f_1(2m_1 - 1) & f_2(2m_1 - 2) & \ldots & f_{2m_1-1}(1) & f_{2m_1}(0) \\ 0 & f_0(2m_1 - 1) & f_1(2m_1 - 2) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & f_2(1) & f_3(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix} = 0$$

Les fonctions $f_i(\sigma)$ sont définies comme les coefficients du développement de la fonction f(z,σ) autour du point singulier z=0 :

$$\begin{cases} f(z,\sigma) = [\sigma]_n + [\sigma]_{n-1} z \dfrac{p_1(z)}{p_0(z)} + [\sigma]_{n-2} z^2 \dfrac{p_2(z)}{p_0(z)} + \ldots + [\sigma]_1 z^{n-1} \dfrac{p_{n-1}(z)}{p_0(z)} + z^n \dfrac{p_n(z)}{p_0(z)} \\ f(z,\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=+\infty} f_i(\sigma) z^i \qquad [\sigma]_n = \prod_{l=0}^{l=n-1} (\sigma - l) \qquad [\sigma]_1 = \sigma \qquad [\sigma]_0 = 1 \end{cases}$$

La manière la plus simple de calculer les fonctions $f_i(\sigma)$ est de construire la fonction f(z,σ) et de calculer formellement ou numériquement ses dérivées successives au point singulier z=0 soit :

$$f(z,\sigma) = \sum_{i=0}^{i=+\infty} \frac{f^{(i)}(z,\sigma)}{i\,!} z^i = \sum_{i=0}^{i=+\infty} f_i(\sigma) z^i \Rightarrow f_i(\sigma) = \frac{f^{(i)}(0,\sigma)}{i\,!} = \frac{1}{i\,!} \times \left. \frac{\partial^i f(z,\sigma)}{\partial z^i} \right|_{z=0}$$

Ces calculs peuvent être menés grâce à Mathematica qui permet d'obtenir la série de Taylor de cette fonction dont l'expression est relativement complexe.

Suivant chaque valeur de m_1, Il convient donc de calculer les déterminants successifs:

m_1=0 : $\mathbf{F}_1(\rho=0)=[f_1(0)]=f_1(0)=0$, *$m_1$=1 :* $\mathbf{F}_3(\rho=0)=\begin{bmatrix} f_1(2) & f_2(1) & f_3(0) \\ f_0(2) & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$

m_1=2 : $$\mathbf{F}_5(\rho=0)=\begin{bmatrix} f_1(4) & f_2(3) & f_3(2) & f_4(1) & f_5(0) \\ f_0(4) & f_1(3) & f_2(2) & f_3(1) & f_4(0) \\ 0 & f_0(3) & f_1(2) & f_2(1) & f_3(0) \\ 0 & 0 & f_0(2) & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & 0 & 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$$

m_1=3 : $$\mathbf{F}_7(\rho=0)=\begin{bmatrix} f_1(6) & f_2(5) & f_3(4) & f_4(3) & f_5(2) & f_6(1) & f_7(0) \\ f_0(6) & f_1(5) & f_2(4) & f_3(3) & f_4(2) & f_5(1) & f_6(0) \\ 0 & f_0(5) & f_1(4) & f_2(3) & f_3(2) & f_4(1) & f_5(0) \\ 0 & 0 & f_0(4) & f_1(3) & f_2(2) & f_3(1) & f_4(0) \\ 0 & 0 & 0 & f_0(3) & f_1(2) & f_2(1) & f_3(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_0(2) & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$$

et ainsi de suite.

Un test avec Mathematica a montré que ces trois déterminants s'annulent. Dans ces conditions il n'y a pas présence de terme logarithmique dans la solution pour $\rho=0$ *et que la solution* $w(z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *existe, ce qui est également confirmé par le fait qu'une solution polynomiale de l'équation « au produit » existe.*

<u>Expressions de quelques polynômes « produits » et de la constante de normalisation calculés avec Mathematica</u>

Voici le code Mathematica pour déterminer la constante d'intégration :

```
Clear[NuHeunDarbouxConstant];

NuHeunDarbouxConstant[m0_Integer, m1_Integer, m2_Integer, m3_Integer, a_, φ_, x_] :=
  Block[{P, Q, N = m0 + m1 + m2 + m3, y, φPrime, φPrime2},
    P = 1/2 ((1 - 2 m1)/x + (1 - 2 m2)/(x - 1) + (1 - 2 m3)/(x - a));
    Q = ((N - 2 m0 - 1) N x + λ)/(4 x (x - 1) (x - a));
    φPrime = D[φ[y], {y, 1}] /. {y → x};
    φPrime2 = D[φ[y], {y, 2}] /. {y → x};
    (2 φ[x] φPrime2 - φPrime^2 + 2 P φ[x] φPrime + 4 Q φ[x]^2)/(x^(2 m1-1) (x - 1)^(2 m2-1) (x - a)^(2 m3-1))
  ];
```

Voici le code Mathematica pour l'expression de l'équation différentielle « au produit » :

```
ProductHeunPolynomialDiffOperator[φ_, x_, a_, λ_, m0_, m1_, m2_, m3_] :=
  Block[{P, PP, Q, QP, y, PolFactor },
    P = 1/2 ((1 - 2 m1)/x + (1 - 2 m2)/(x - 1) + (1 - 2 m3)/(x - a));
    Q = (λ - (m0 + m1 + m2 + m3) (m0 + 1 - m1 - m2 - m3) x)/(4 x (x - 1) (x - a));
    PP = (D[P, {x, 1}]);
    QP = (D[Q, {x, 1}]);
    PolFactor = x^(1+Min[1,m1]) (x - 1)^(1+Min[1,m2]) (x - a)^(1+Min[1,m3]);

    PolFactor (D[φ[y], {y, 3}] /. y -> x) +
     3 PolFactor P (D[φ[y], {y, 2}] /. y -> x) +
     PolFactor (PP + 2 P^2 + 4 Q) (D[φ[y], {y, 1}] /. y -> x) +
     2 PolFactor (2 P Q + QP) φ[x]
  ];
```

Et le code Mathematica pour la détermination des coefficients du polynôme « produit », après injection du monôme dans l'équation différentielle du troisième degré précédente :

```
Clear[ProductHeunPolynomial];

ProductHeunPolynomial[x_, a_, λ_, m0_, m1_, m2_, m3_] :=
  Block[{φ, A, ListAEquation, Expr, LeSolve, LaMat},
   φ[y_] := Sum[A[l] y^l, {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3}];
   Expr = Factor[ProductHeunPolynomialDiffOperator[φ[#] &, x, a, λ, m0, m1, m2, m3]];
   Expr = Factor[Simplify[ProductHeunPolynomialDiffOperator[φ[#] &, x, a, λ, m0, m1, m2, m3]]];
   Print[Collect[Expr, {x}, Simplify]];
   LaMat = Normal[Map[CoefficientArrays[#, Table[A[l], {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3}]][[2]] &, ListAEquation = CoefficientList[Expr, x]]];
   Print[LaMat // MatrixForm, ".", Table[A[l], {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3}] // MatrixForm, "=", Table[0, {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3}] // MatrixForm];
   Print[LeSolve = Solve[Map[(# == 0) &, ListAEquation], Table[A[l], {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3 - 1}]]];
   A[m0 + m1 + m2 + m3] = 1;
   MapIndexed[(A[#2[[1]] - 1] = #1[[2]]) &, LeSolve[[1]]];
   Collect[(Sum[A[l] x^l, {l, 0, m0 + m1 + m2 + m3 - 1}] + x^(m0+m1+m2+m3)), {λ, x}, Factor]
  ];
```

Voici un exemple simple de code Mathematica qui illustre dans ce cas le fait qu'il n'y a qu'un relation entre les coefficients du polynôme sachant que ce dernier n'est que de degré 1 :

```
Clear[x, a, λ, m0, m1, m2, m3, A];
m0 = 0;
m1 = 1;
m2 = 0;
m3 = 0;
LePol = ProductHeunPolynomial[x, a, λ, m0, m1, m2, m3];
Print[Collect[λ LePol, {λ}, Simplify]];
```

$-\lambda A[0] + a A[1]$

$(-\lambda \;\; a) . \begin{pmatrix} A[0] \\ A[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\left\{A[0] \to \frac{a A[1]}{\lambda}\right\}\right\}$

$a + x \lambda$

Voici un exemple dans lequel le système de relations est bien sur-déterminé mais pour lequel Mathematica peut néanmoins résoudre par la commande « Solve » le système linéaire « sur-déterminé » :

```
(* Il y a une relation de trop : système sur-déterminé *)
Clear[x, a, λ, m0, m1, m2, m3, A];
m0 = 1;
m1 = 1;
m2 = 1;
m3 = 0;
LePol = ProductHeunPolynomial[x, a, λ, m0, m1, m2, m3];
Print[Collect[λ LePol, {λ}, Simplify]];
```

$\lambda A[0] - a A[1] - x^2 (3 a + \lambda) (A[1] + A[2]) + x (-2 \lambda A[0] + a (3 A[1] + A[2])) + x^3 (A[1] + 3 A[2] - 2 (-3 + 3 a + \lambda) A[3]) + x^4 (-A[2] + (-3 + 3 a + \lambda) A[3])$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -a & 0 & 0 \\ -2\lambda & 3a & a & 0 \\ 0 & -3a-\lambda & -3a-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6-6a-2\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -3+3a+\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A[0] \\ A[1] \\ A[2] \\ A[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{\left\{A[0] \to -\frac{-3 a A[3] + 3 a^2 A[3] + a \lambda A[3]}{\lambda}, A[1] \to 3 A[3] - 3 a A[3] - \lambda A[3], A[2] \to -3 A[3] + 3 a A[3] + \lambda A[3]\right\}\right\}$

$-3 (-1 + a) a + \left(-a - 3 (-1 + a) x + 3 (-1 + a) x^2 + x^3\right) \lambda + (-1 + x) x \lambda^2$

Et enfin un cas où le système de relations est entièrement déterminé en fonction de la constante de puissance maximale du polynôme fixé à 1 dans le cas d'un monôme :

```
Clear[x, a, λ, m0, m1, m2, m3, A];
m0 = 4;
m1 = 1;
m2 = 0;
m3 = 0;
LePol = ProductHeunPolynomial[x, a, λ, m0, m1, m2, m3];
Print[Collect[11025 LePol, {λ}, Simplify]];
```

$$-\lambda A[0] + a A[1] + x\,(10 A[0] - a A[2]) + x^2\,(-10 A[1] + \lambda A[2]) + x^3\,(-27 A[2] + (-6 - 6 a + 2\lambda) A[3] + 10 a A[4]) + x^4\,(-35 A[3] - 3\,(8 + 8 a - \lambda) A[4] + 35 a A[5]) - 4 x^5\,(7 A[4] + (15 + 15 a - \lambda) A[5])$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & -6 - 6a + 2\lambda & 10 a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & -24 - 24 a + 3\lambda & 35 a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -28 & -60 - 60 a + 4\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A[0] \\ A[1] \\ A[2] \\ A[3] \\ A[4] \\ A[5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Big\{\Big\{A[0] \to -\frac{1}{135}\, a\,(3 a + 3 a^2 - a\lambda)\, A[5] + \frac{(-72 a - 319 a^2 - 72 a^3 + 33 a\lambda + 33 a^2\lambda - 3 a\lambda^2)\,(15 A[5] + 15 a A[5] - \lambda A[5])}{33075},$$

$$A[1] \to -\frac{1}{135}\, a\,(3\lambda + 3 a\lambda - \lambda^2)\, A[5] + \frac{(-72\lambda - 319 a\lambda - 72 a^2\lambda + 33\lambda^2 + 33 a\lambda^2 - 3\lambda^3)\,(15 A[5] + 15 a A[5] - \lambda A[5])}{33075},$$

$$A[2] \to -\frac{2}{27}\, a\,(3 + 3 a - \lambda)\, A[5] - \frac{2\,(72 + 319 a + 72 a^2 - 33\lambda - 33 a\lambda + 3\lambda^2)\,(15 A[5] + 15 a A[5] - \lambda A[5])}{6615},$$

$$A[3] \to \frac{1}{245}\,(360 A[5] + 965 a A[5] + 360 a^2 A[5] - 69\lambda A[5] - 69 a\lambda A[5] + 3\lambda^2 A[5]),\ A[4] \to \frac{1}{7}\,(-15 A[5] - 15 a A[5] + \lambda A[5])\Big\}\Big\}$$

$$5\,(-8 a\,(1 + a)\,(9 + 46 a + 9 a^2) - 80\,(1 + a)\,(9 + 46 a + 9 a^2)\,x^2 + 45\,(72 + 193 a + 72 a^2)\,x^3 - 4725\,(1 + a)\,x^4 + 2205 x^5) + (7 a\,(27 + 74 a + 27 a^2) - 40\,(1 + a)\,(9 + 46 a + 9 a^2)\,x + 70\,(27 + 74 a + 27 a^2)\,x^2 - 3105\,(1 + a)\,x^3 + 1575 x^4)\,\lambda + (a^2\,(-26 + 189 x) + a\,(-26 + 518 x - 260 x^2) + x\,(189 - 260 x + 135 x^2))\,\lambda^2 + (a - 26 a x + 2 x\,(-13 + 5 x))\,\lambda^3 + x\lambda^4$$

Je donne comme pour l'article de 2001 de A.O.Smirnov « ELLIPTIC SOLITONS AND HEUN'S EQUATION » , les solutions les plus simples, avec la constante d'intégration v(λ) et le polynôme produit selon un jeu de valeur m_0, m_1, m_2, m_3 :

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = \lambda \quad w(x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 1 \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda - 1 - a) \quad w(x) = \lambda + x - a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 0 \quad m_1 = 1 \quad m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + a) \quad w(x) = x\lambda + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 0 \quad m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda + a + 1)(\lambda^2 - 4a) \quad w(x) = x^2 + x\lambda + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = \lambda(3a - 3 + \lambda)(3a + \lambda)(\lambda^2 + 2\,\lambda(2a - 1) - 3) \quad w(x) = x(x-1)\,\lambda^2 + \left(x^3 + 3\,(a-1)\,x(x-1) - \mathrm{a}\right)\lambda - 3\,a\,(a-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 1 \\ v^2(\lambda) = \lambda(4 + \lambda)(4a + \lambda) \quad w(x) = (x^2 - a)^2 + x(x-1)(x-a)\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda - 1 - a)(\lambda - 4 - a)(\lambda - 1 - 4a)(\lambda^2 - 4\lambda(1 + a) + 12a) \\ w(x) = \lambda^2 + \lambda\,(3\,x - 5(a+1)) + 9x^2 - 12\,x\,(1 + a) + (4 + a)(1 + 4a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 0 \quad m_1 = 2 \quad m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 3a)(\lambda + 3(a+1))(\lambda^2 + 4\lambda(1 + a) + 12a) \\ w(x) = x^2\lambda^2 + 3x\lambda(a + x + ax) + 9a(a + x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = 0 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4 + 3a)(\lambda - 1 + 3a)(\lambda^2 + 4\lambda(a-1) - 4a) \\ w(x) = (x-1)^2\lambda^2 + \lambda(x-1)(5 + 3a(x-2) - 2x) - 3a(5 + x^2) + (2 + x)^2 + 9a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = m_2 = 0 \quad m_3 = 2 \\ v^2(\lambda) = (\lambda + 3 - a)(\lambda - a)(\lambda + 3 - 4a)(\lambda^2 - 4\lambda(a-1) - 4a) \\ w(x) = (x-a)^2\lambda^2 + \lambda(x-a)(5a^2 + 3x - 2a(x+3)) + 3a(x^2(a-3) + 4a^2x + a(a-3)(4a-3)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = 1 \quad m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda - 3(a+1))(\lambda^2 - 2\lambda - 3(4a+1))(\lambda^2 - 2a\lambda - 3a(a+4)) \\ w(x) = \lambda^2 x + \lambda(3x(x-1) - 3ax + a) - 3\,(a + a^2 + 3\,a\,x^2 - 3x^2(x-1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = 0 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 1 \\ v^2(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda^2+4a\lambda-12a)(\lambda^2+2\lambda(3a-1)+3(3a^2-6a-1)) \\ w(x) = \lambda^2(x-1)^2(x-a)+\lambda(x-1)(a(4x^2-8x-2)+3x-3a^2(x-2))+3a(1-12x+6x^2-4x^3)+9a^2(x^2+2)+9x^2-9a^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda+3a-8)(\lambda+3a+1)(\lambda^3+4\lambda^2(a-2)-16a(\lambda-4)) \\ w(x) = \lambda^2 x(x-1)+\lambda(x(3x^2-10x+8)+a(3x^2-3x-1))+a(8-6x^2)+x^2(4-3x)^2-3a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 0 \quad m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 2 \\ v^2(\lambda) = (\lambda+3a)(\lambda+3(a+1))(\lambda^3+4\lambda^2(a+4)+16\lambda(3a+4)+192a) \\ w(x) = \begin{pmatrix} \lambda^2 x(x-1)(x-a)^2+\lambda(x-a)(3(2a+3)x^3-(3a^2+18a+8)x^2+a(3a+10)x+a^2)+ \\ +9a(a+3)x^4-24a(3a+1)x^3+18a^2(a+3)x^2-3a^3(a+3) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1 \\ v^2(\lambda) = \lambda(\lambda^2-2\lambda(a+1)-15(a-1)^2)(\lambda^2-2\lambda(a-2)-15a^2)(\lambda^2+2\lambda(2a-1)-15) \\ w(x) = \begin{pmatrix} \lambda^3 x(x-1)(x-a)+\lambda^2(3x^4-4(a+1)x^3+2(a+1)^2x^2-2a(a+1)x+a^2)+ \\ +\lambda(9x^5-15(a+1)x^4-5(a^2-7a+1)x^3+15(a-1)^2(a+1)x^2-15a(a-1)^2x-2a^2(a+1))-15a^2(a-1)^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = 2 \quad m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = \lambda(\lambda^2+4\lambda(a+1)-48a)(\lambda^2+6\lambda(a+1)+9(a-1)^2) \\ w(x) = x^2\lambda^2+3\lambda x(x+1)(x+a)+9a(x^2-a)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = 0 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda(a-4)+32a)(\lambda^2+2\lambda(3a-10)+9a^2-24a+64) \\ w(x) = (x-1)^2\lambda^2+\lambda(x-1)(3x^2+x(3a-20)-6a+20)+9x^4-48x^3+2x^2(3a+56)-128x+9a^2-24a+64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 2 \quad m_1 = m_2 = 0 \quad m_3 = 2 \\ v^2(\lambda) = (\lambda-4a)(\lambda^2-4\lambda(4a-1)+32a)(\lambda^2-2\lambda(10a-3)+64a^2-24a+9) \\ w(x) = (x-a)^2\lambda^2+\lambda(x-a)(3x^2+x(3-20a)+2a(10a-3))+9x^4-48ax^3+2ax^2(3+56a)-128a^3x+a^2(9-24a+64a^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 3 \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = (\lambda-4(a+1))(\lambda^2-2\lambda(2a+5)+3(8a+3))(\lambda^2-10\lambda(a+1)+3(3a^2+26a+3))(\lambda^2-2\lambda(5a+2)+3a(3a+8)) \\ w(x) = \begin{pmatrix} \lambda^3+2\lambda^2(3x-7(a+1))+\lambda(45x^2-78(a+1)x+49a^2+158a+49)+ \\ 225x^3-405(a+1)x^2+9x(3a+8)(8a+3)-12(a+1)(3a^2+26a+3) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 = 4 \quad m_1 = 1 \quad m_2 = m_3 = 0 \\ v^2(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda-8(a+1))(\lambda^2-18\lambda(a+1)+5a(46+9a)+45)(\lambda^3-\lambda^2(17a+8)+\lambda a(27a+32)+5a(64+a(136+9a)))\times \\ \times((\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-15)-8a(\lambda(\lambda-4)-85)+320a^2) \end{pmatrix} \\ w(x) = \begin{pmatrix} x\lambda^4+\lambda^3(10x^2-26(a+1)x+a)+\lambda^2(135x^3-260(a+1)x^2+7x(27a^2+74a+27))+ \\ +\lambda(1575x^4-3105(a+1)x^3+70x^2(27+74a+27a^2)-40x(9+55a+55a^2+9a^3)+7a(27+74a+27a^2))+ \\ +5(2205x^5-4725(a+1)x^4+45x^3(72+193a+72a^2)-8(a+10)(9+55a+55a^2+9a^3)) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Expressions des solutions de l'équation de Heun obtenu par « Quadrature de Hermite-Darboux » avec Mathematica

Pour les valeurs réelles de l'argument de la fonction de Heun, restreint à [0,1], on peut fixer l'intégration indéfinie à l'intervalle [0,x] ce qui permet de fixer la fonction de Heun à la valeur 1 pour x=0. De même lorsque a>1, l'intégrande peut s'écrire de manière équivalente :

$$\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(t-1)^{m_2}(t-a)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(t-1)(t-a)}}=\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}$$

Alors les solutions par quadrature s'expriment sous la forme :

$$\gamma_1=\frac{1-2m_1}{2}\qquad\gamma_2=\frac{1-2m_2}{2}\qquad\gamma_3=\frac{1-2m_3}{2}$$

$$p(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{x}+\frac{1-2m_2}{x-1}+\frac{1-2m_3}{x-a}\right)\qquad q(x)=\frac{\lambda-(m_0+m_1+m_2+m_3)(m_0+1-m_1-m_2-m_3)\,x}{4\,x\,(x-1)(x-a)}$$

$$\nu^2(\lambda)=\frac{2\,w(x)\,w''(x)-(w'(x))^2+2\,p(x)\,w(x)\,w'(x)+4\,q(x)\,(w(x))^2}{x^{2m_1-1}\,(x-1)^{2m_2-1}(x-a)^{2m_3-1}}$$

$$y_1(x)=\sqrt{w(x)}\;Exp\left(i\times\frac{\nu(\lambda)}{2}\times\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_3}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\qquad y_2(x)=\sqrt{w(x)}\;Exp\left(-i\times\frac{\nu(\lambda)}{2}\times\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_3}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)$$

Les dérivées premières s'expriment sous la forme :

$$\frac{y'_1(x)}{y_1(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}+i\,\nu(\lambda)\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right)\qquad\frac{y'_2(x)}{y_2(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}-i\,\nu(\lambda)\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right)$$

Si je prend la forme : $y(x)=\sqrt{w(x)}\;Cos\left(\frac{\nu(\lambda)}{2}\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)=\frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}$ *alors sa dérivée va s'écrire :*

$$y'_1(x)=\frac{y_1(x)}{2}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}+i\,\nu(\lambda)\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right)\qquad y'_2(x)=\frac{y_2(x)}{2}\left(\frac{w'(x)}{w(x)}-i\,\nu(\lambda)\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\right)$$

$$y'(x)=\frac{y_1'(x)+y_2'(x)}{2}=\frac{w'(x)}{w(x)}\frac{y_1(x)+y_2(x)}{4}+\nu(\lambda)\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times\left(i\,\frac{y_1(x)-y_2(x)}{4}\right)$$

$$y'(x)=\frac{y_1'(x)+y_2'(x)}{2}=\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{w'(x)}{\sqrt{w(x)}}\times Cos\left(\frac{\nu(\lambda)}{2}\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)+\\+\frac{\nu(\lambda)}{2}\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{\sqrt{w(x)}\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times Sin\left(\frac{\nu(\lambda)}{2}\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\end{array}\right)$$

$$Posons\quad\begin{cases}y_{Cos}(x)=\frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}=\sqrt{w(x)}\;Cos\left(\frac{\nu(\lambda)}{2}\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\\ y_{Sin}(x)=\frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}=\sqrt{w(x)}\;Sin\left(\frac{\nu(\lambda)}{2}\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\end{cases}$$

$$y_{Cos}'(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times y_{Cos}(x)-\nu(\lambda)\times\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times y_{Sin}(x)\right)$$

$$y_{Sin}'(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\times y_{Sin}(x)+\nu(\lambda)\times\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times y_{Cos}(x)\right)$$

Les dérivées secondes s'écrivent directement :

$$y_{Cos}''(x)=\frac{1}{4(w(x))^2}\times\begin{pmatrix}-2\,(w'(x))^2\times y_{Cos}(x)+\\ +\nu(\lambda)\times x^{m_1-\frac{3}{2}}(x-1)^{m_2-\frac{3}{2}}(x-a)^{m_2-\frac{3}{2}}\times\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,(1-2\,m_1+2\,(-1+m_1+m_2)\,x)+\\ +x\,(-2+2\,m_1+2\,m_3+3\,x-2\,(m_1+m_2+m_3)\,x)+\end{pmatrix}\times w(x)+\\ +2\,x(x-1)(x-a)\times w'(x)\end{pmatrix}\times y_{Sin}(x)+\\ +2\,w(x)\left(y_{Cos}'(x)\,w'(x)+y_{Cos}(x)\,w''(x)-\nu(\lambda)\times\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times y_{Sin}'(x)\right)\end{pmatrix}$$

$$y_{Sin}''(x)=-\frac{1}{4(w(x))^2}\times\begin{pmatrix}2\,(w'(x))^2\times y_{Sin}(x)+\\ +\nu(\lambda)\times x^{m_1-\frac{3}{2}}(x-1)^{m_2-\frac{3}{2}}(x-a)^{m_2-\frac{3}{2}}\times\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,(1-2\,m_1+2\,(-1+m_1+m_2)\,x)+\\ +x\,(-2+2\,m_1+2\,m_3+3\,x-2\,(m_1+m_2+m_3)\,x)+\end{pmatrix}\times w(x)+\\ +2\,x(x-1)(x-a)\times w'(x)\end{pmatrix}\times y_{Cos}(x)-\\ -2\,w(x)\left(y_{Sin}'(x)\,w'(x)+y_{Sin}(x)\,w''(x)+\nu(\lambda)\times\frac{x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-a)^{m_2}}{w(x)\sqrt{x(1-x)(a-x)}}\times y_{Cos}'(x)\right)\end{pmatrix}$$

On peut tout aussi bien définir les fonctions comme suit pour prendre en compte les valeurs négatives sur x€[0,1] du polynôme w(x) et que les fonctions soient purement imaginaire en valeurs :

$$\begin{cases}y_{Cos}(x)=\dfrac{y_1(x)+y_2(x)}{2}=\sqrt{|w(x)|}\;Cos\left(\dfrac{\nu(\lambda)}{2}\displaystyle\int_0^x dt\times\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\\ y_{Sin}(x)=\dfrac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}=\sqrt{|w(x)|}\;Sin\left(\dfrac{\nu(\lambda)}{2}\displaystyle\int_0^x dt\times\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\end{cases}$$

avec des formules identiques pour les dérivées premières et secondes.

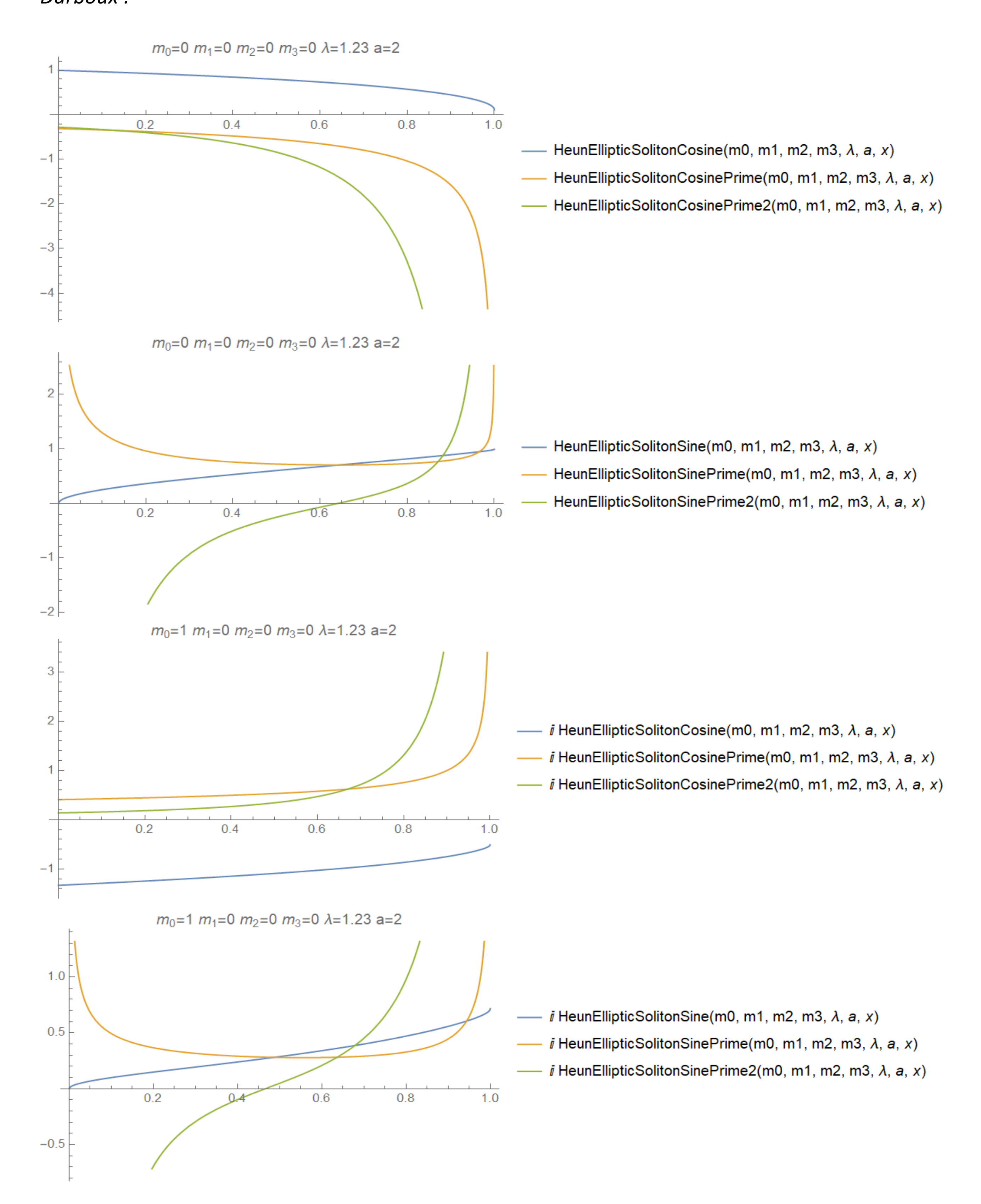
Il y a des cas où la constante v(λ) est purement imaginaire et dans ce cas là encore la fonction $y_{Sin}(x)$ *prend des valeurs purement imaginaire*

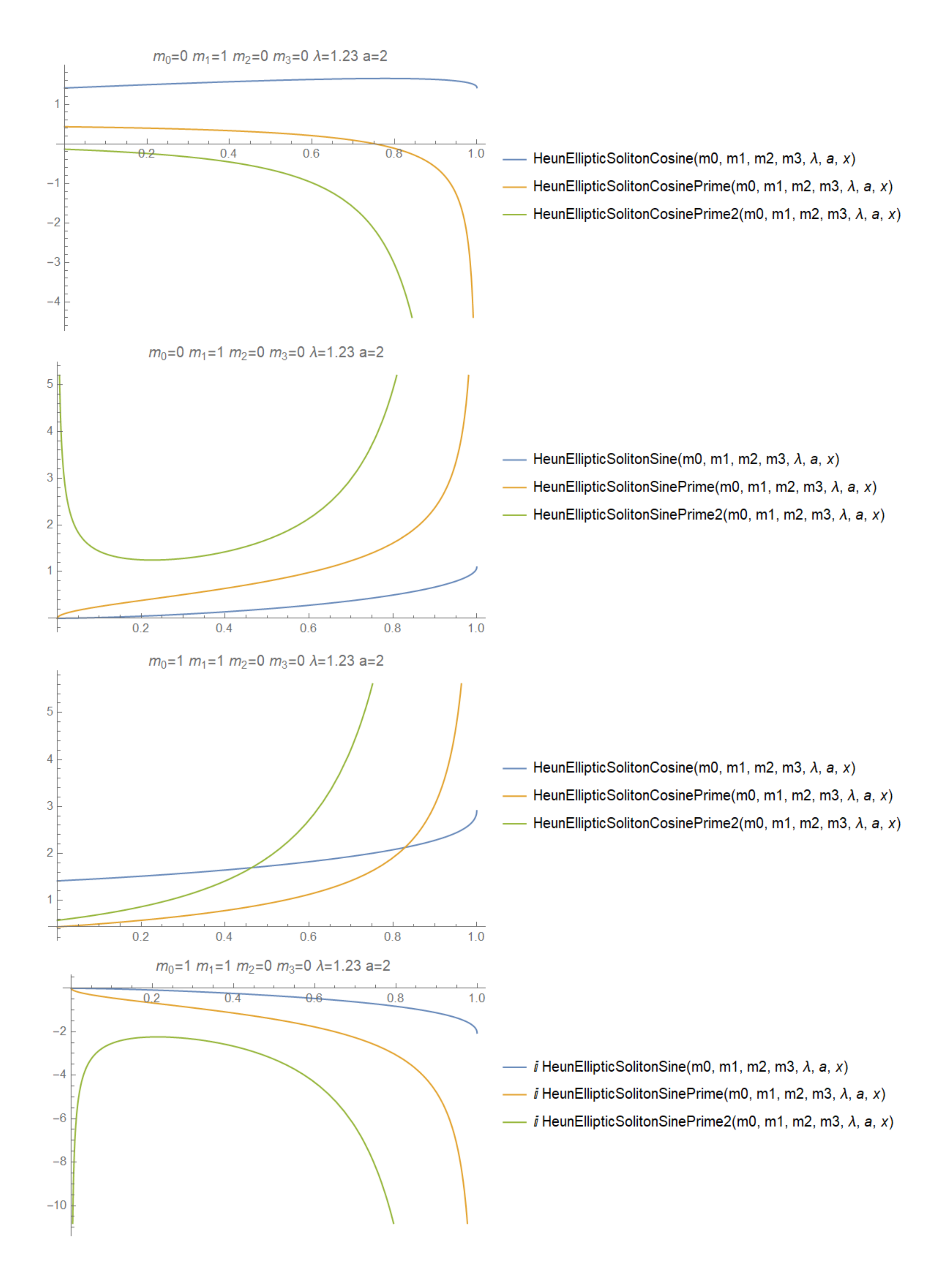
$$\nu^2(\lambda)=\frac{2\,w(x)\,w''(x)-(w'(x))^2+2\,p(x)\,w(x)\,w'(x)+4\,q(x)\,(w(x))^2}{x^{2m_1-1}\,(x-1)^{2m_2-1}(x-a)^{2m_3-1}}<0$$
$$\Rightarrow\nu^2(\lambda)=-\tau^2(\lambda)\Leftrightarrow\tau(\lambda)=\sqrt{\frac{(w'(x))^2-2\,w(x)\,w''(x)-2\,p(x)\,w(x)\,w'(x)-4\,q(x)\,(w(x))^2}{x^{2m_1-1}\,(x-1)^{2m_2-1}(x-a)^{2m_3-1}}}$$

Dans ce cas la fonction $y_{Sin}(x)$ *devient effectivement imaginaire :*

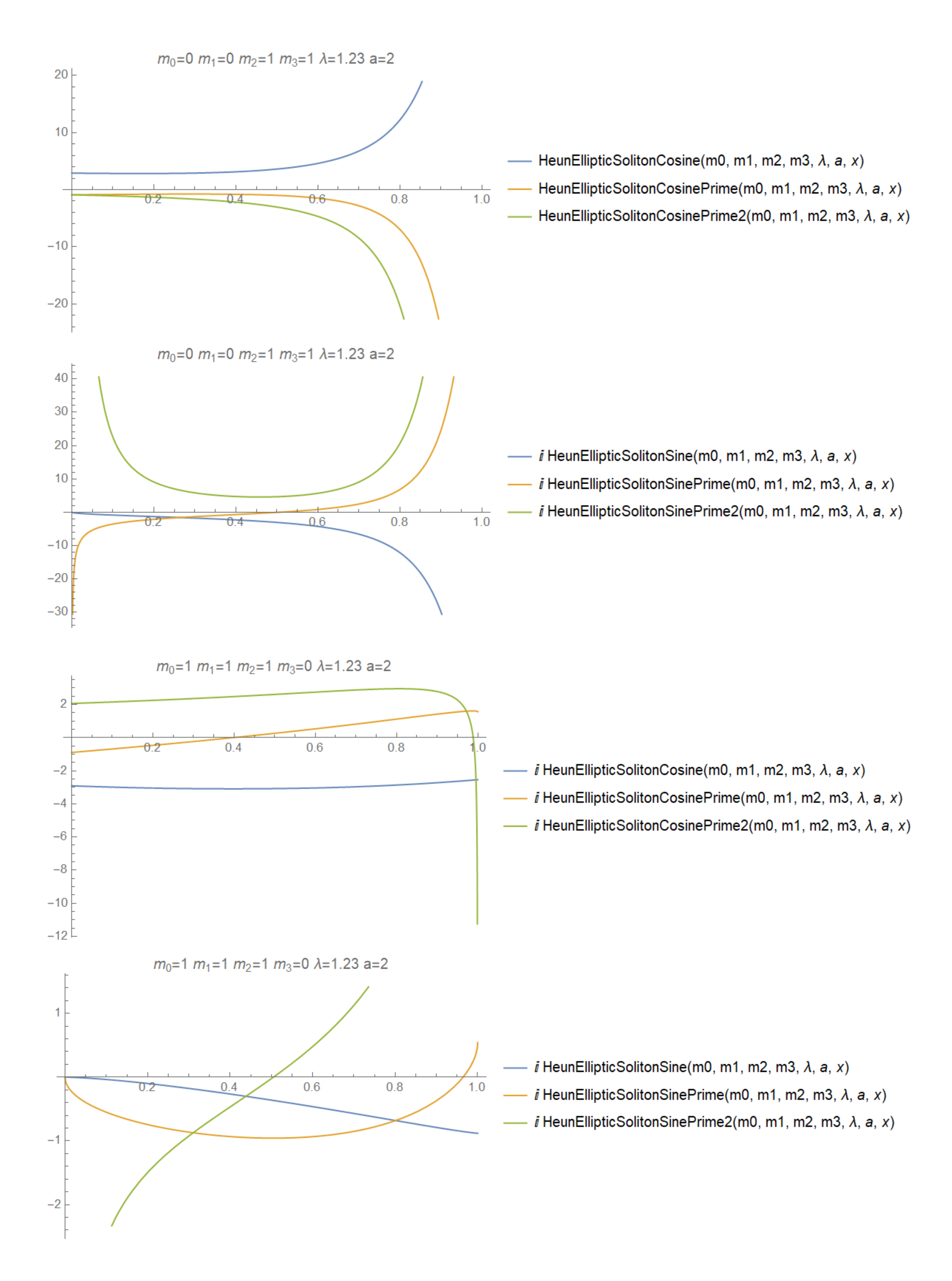
$$\begin{cases}y_{Cos}(x)=\sqrt{|w(x)|}\;Cosh\left(\dfrac{\tau(\lambda)}{2}\times\displaystyle\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\\ y_{Sin}(x)=i\sqrt{|w(x)|}\;Sinh\left(\dfrac{\tau(\lambda)}{2}\times\displaystyle\int_0^x dt\,\frac{t^{m_1}(1-t)^{m_2}(a-t)^{m_2}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}\right)\end{cases}$$

Dans les graphes qui suivent j'utilise parfois le facteur multiplicateur i pour éviter justement les valeurs purement imaginaires des fonctions $y_{Cos}(x), y_{Sin}(x)$ *construites par quadrature de Hermite-Darboux :*

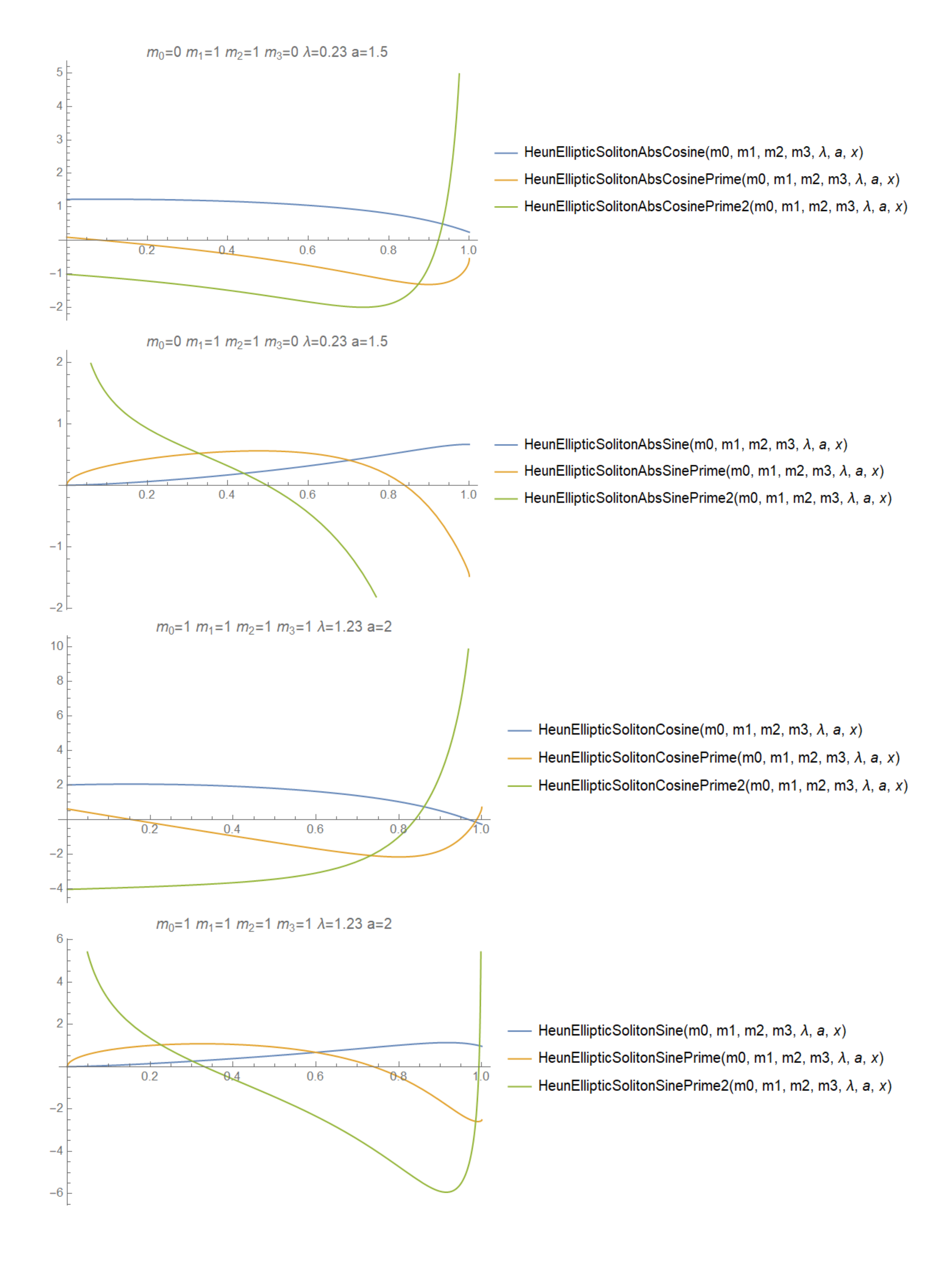




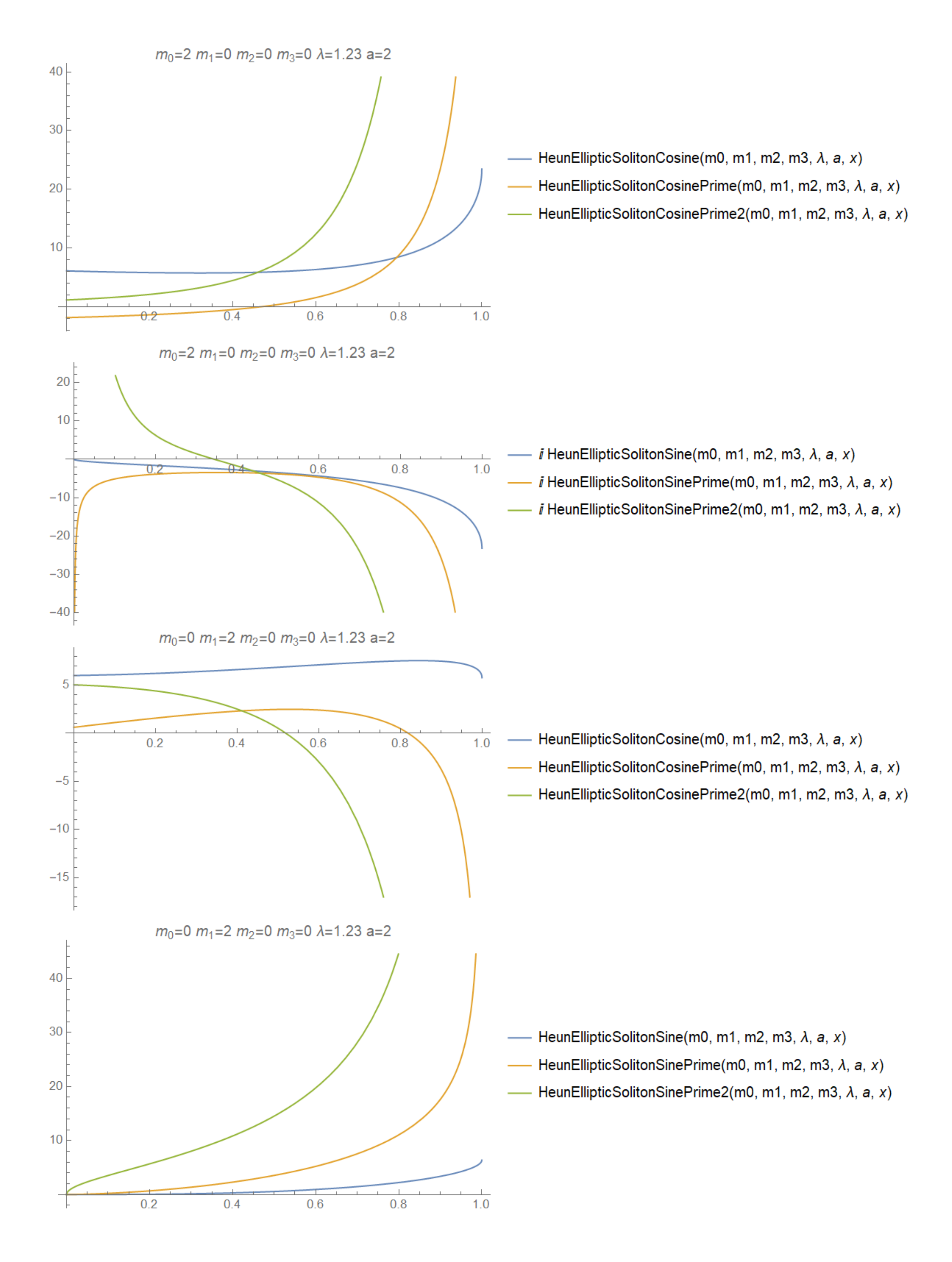
m0=0 m1=1 m2=0 m3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m0=0 m1=1 m2=0 m3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m0=1 m1=1 m2=0 m3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m0=1 m1=1 m2=0 m3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



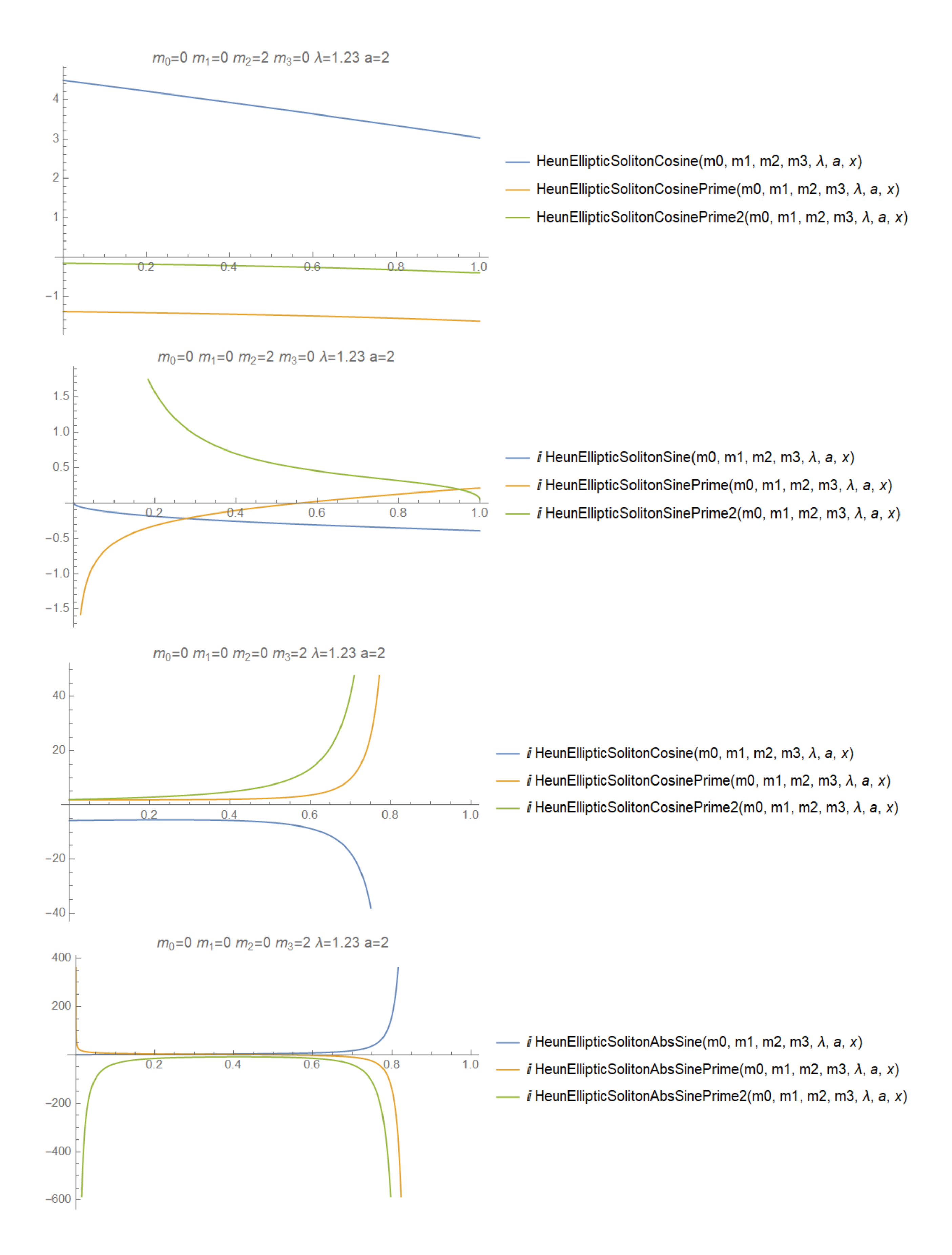
m_0=0 m_1=0 m_2=1 m_3=1 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=1 m_3=1 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=1 m_1=1 m_2=1 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=1 m_1=1 m_2=1 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



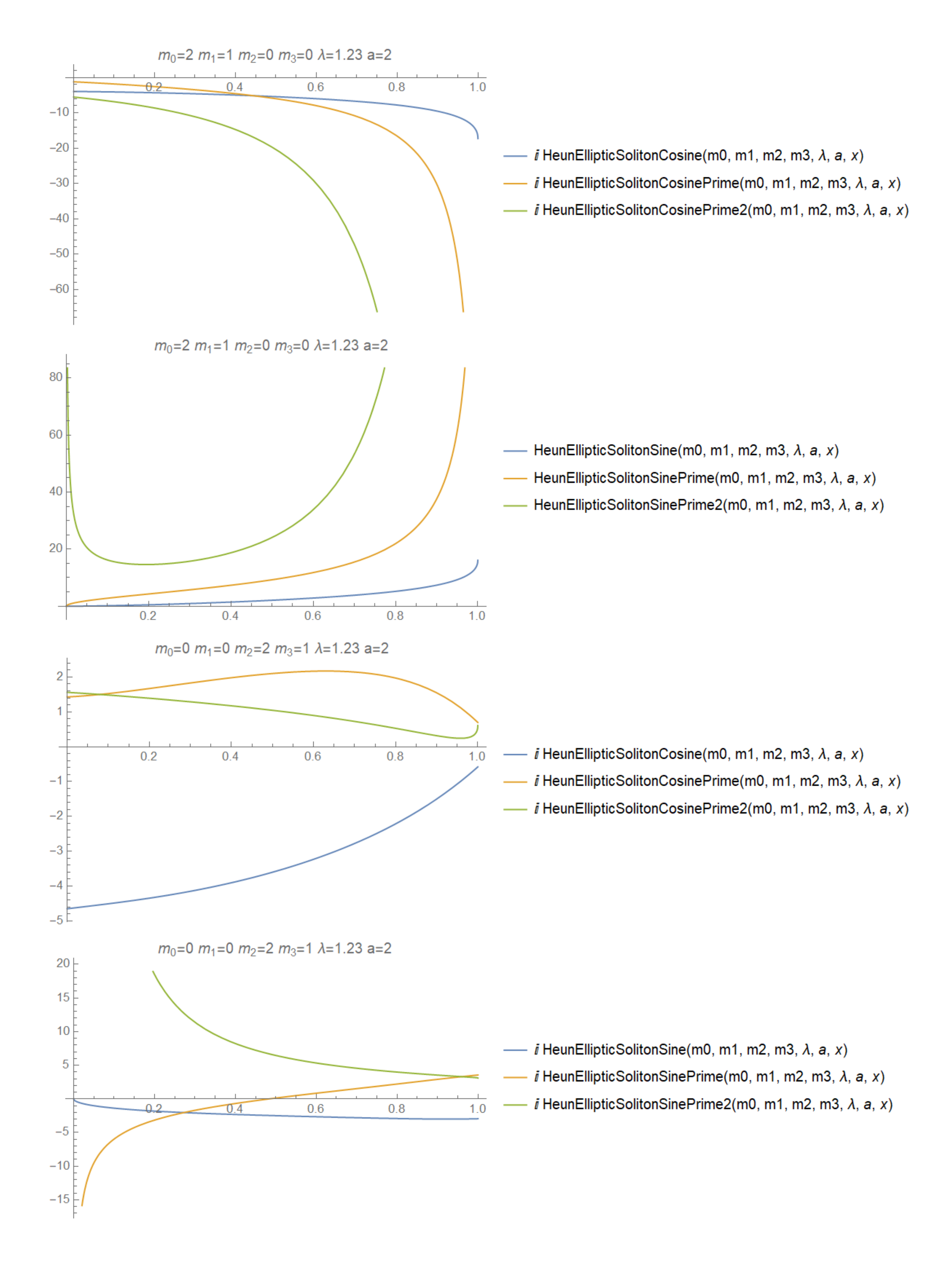
m0=0 m1=1 m2=1 m3=0 λ=0.23 a=1.5
HeunEllipticSolitonAbsCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
5
4
3
2
1
−1
−2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
m0=0 m1=1 m2=1 m3=0 λ=0.23 a=1.5
HeunEllipticSolitonAbsSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
2
1
−1
−2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
m0=1 m1=1 m2=1 m3=1 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
10
8
6
4
2
−2
−4
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
m0=1 m1=1 m2=1 m3=1 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
6
4
2
−2
−4
−6
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



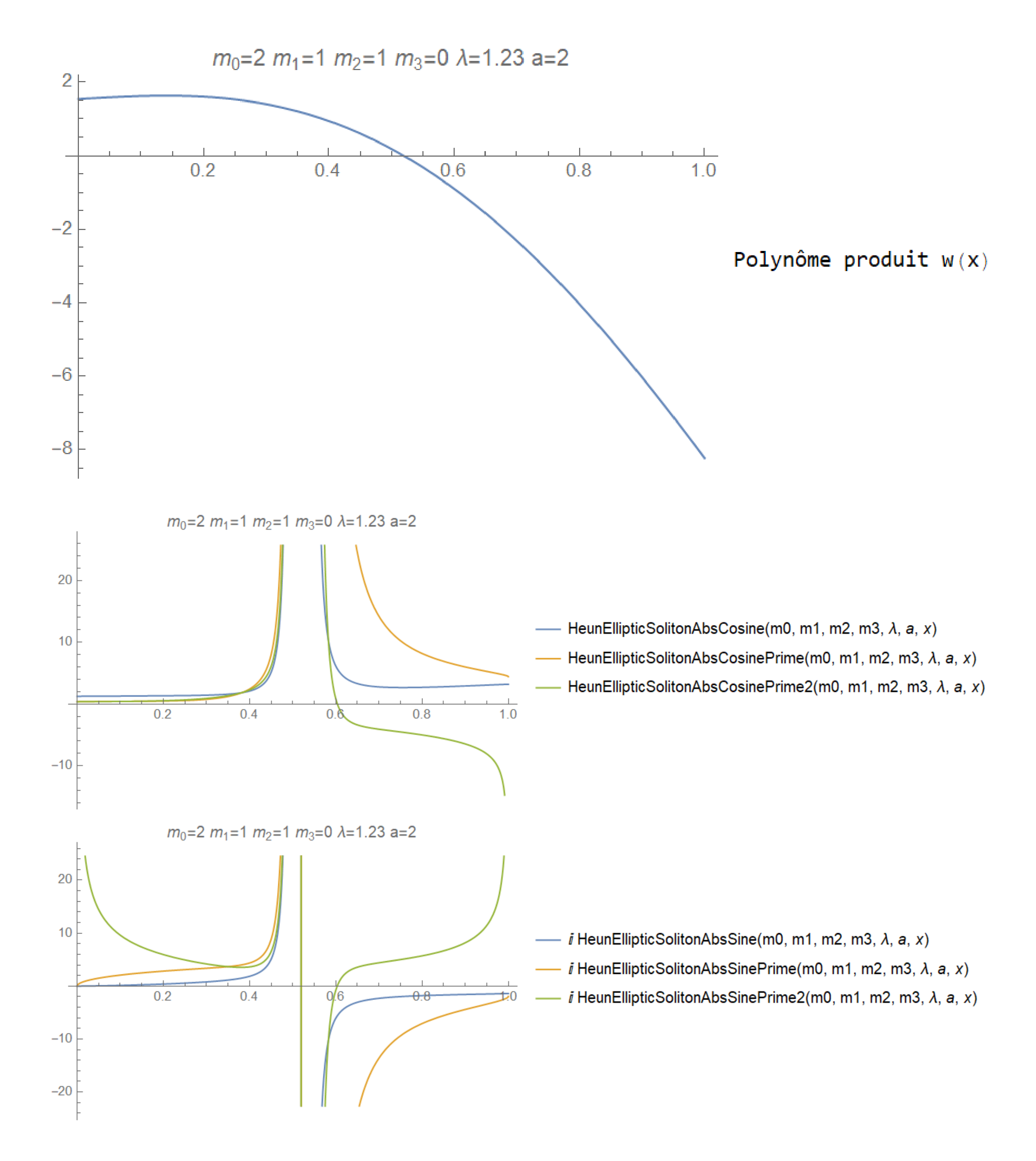
m_0=2 m_1=0 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=0 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=2 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=2 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



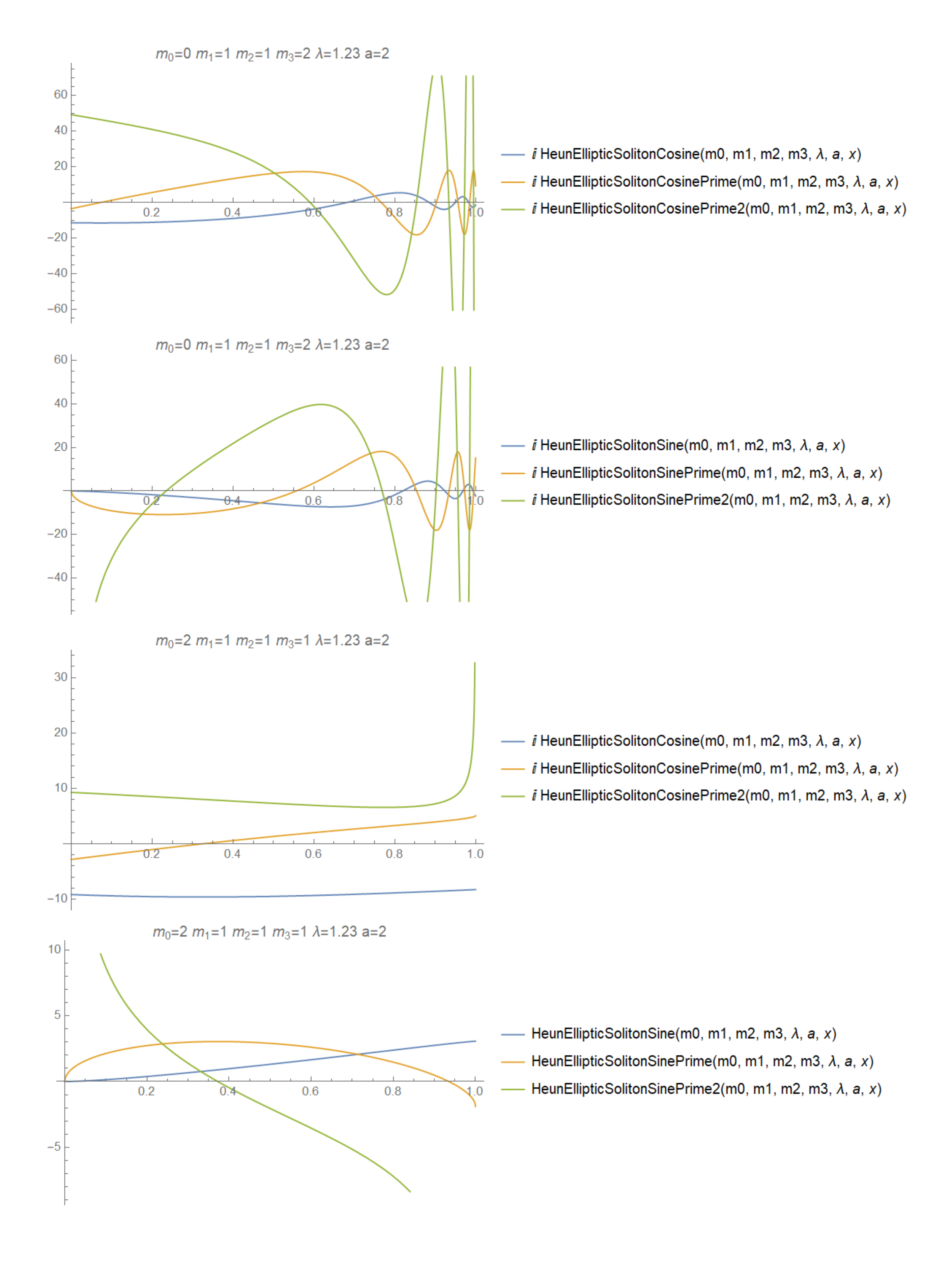
m_0=0 m_1=0 m_2=2 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=2 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=0 m_3=2 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=0 m_3=2 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonAbsSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonAbsSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonAbsSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



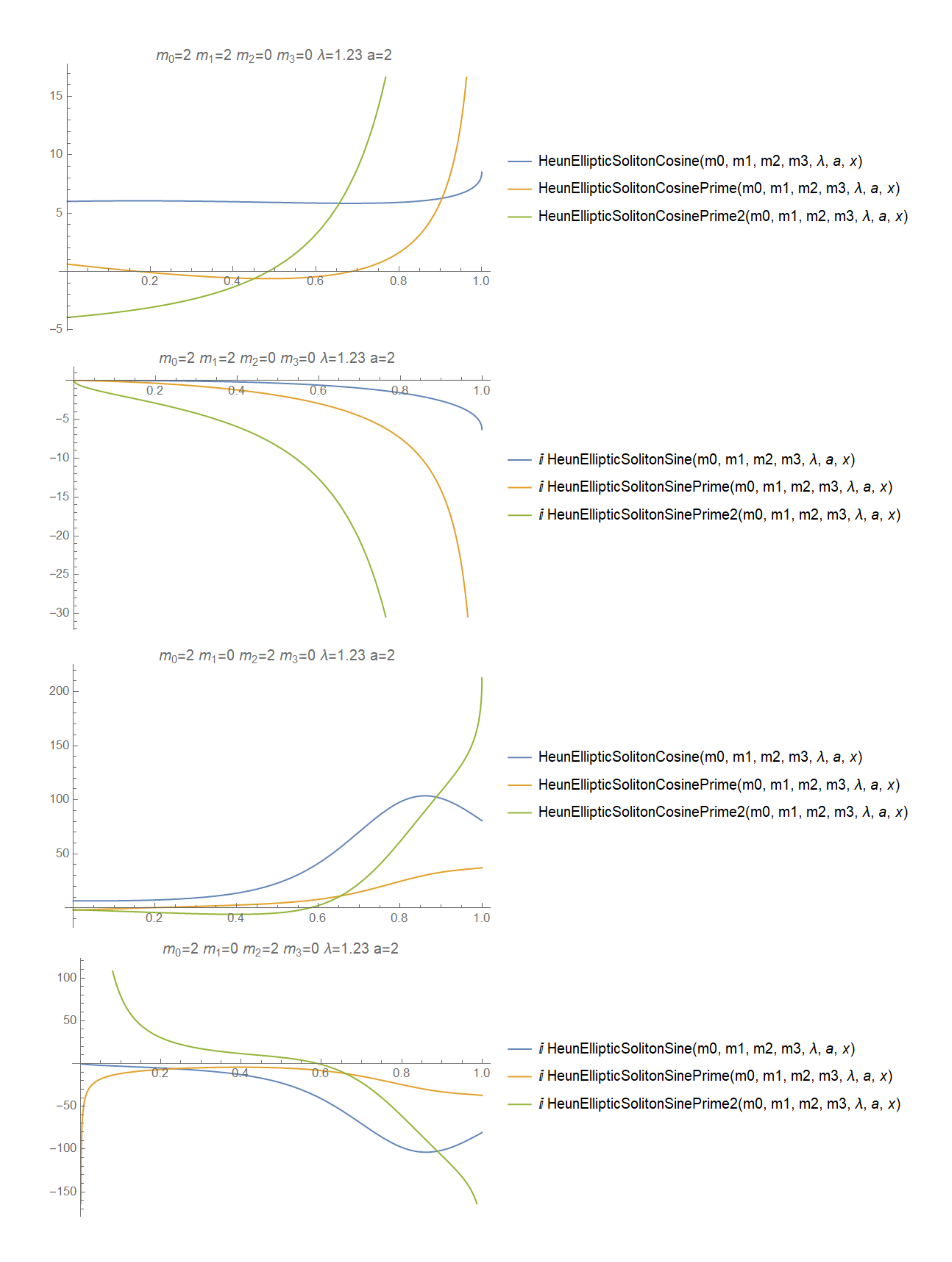
m_0=2 m_1=1 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
ⅈ HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=1 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=2 m_3=1 λ=1.23 a=2
ⅈ HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=0 m_2=2 m_3=1 λ=1.23 a=2
ⅈ HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
ⅈ HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



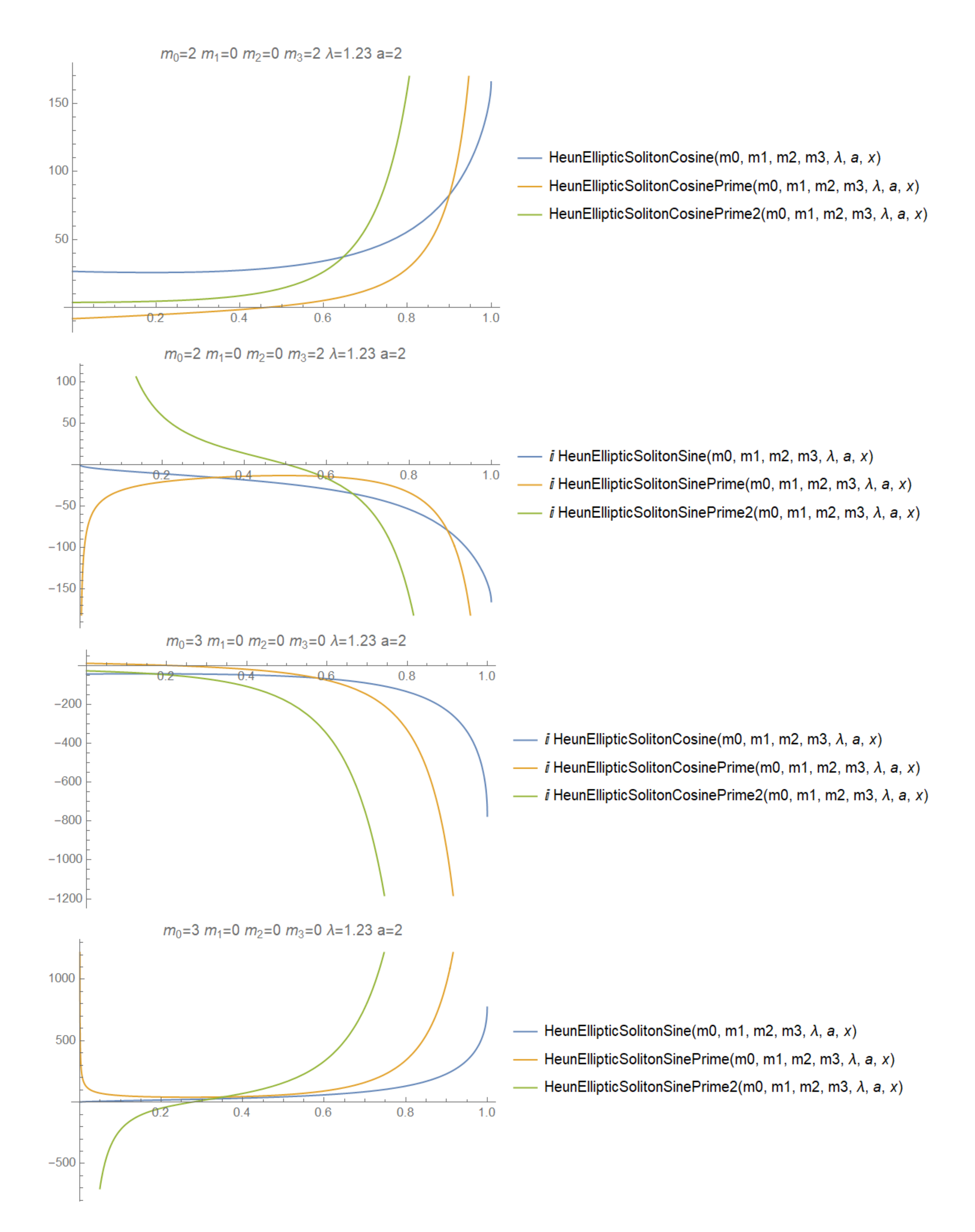
m_0=2 m_1=1 m_2=1 m_3=0 λ=1.23 a=2
Polynôme produit w(x)
m_0=2 m_1=1 m_2=1 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonAbsCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonAbsCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=1 m_2=1 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonAbsSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonAbsSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonAbsSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



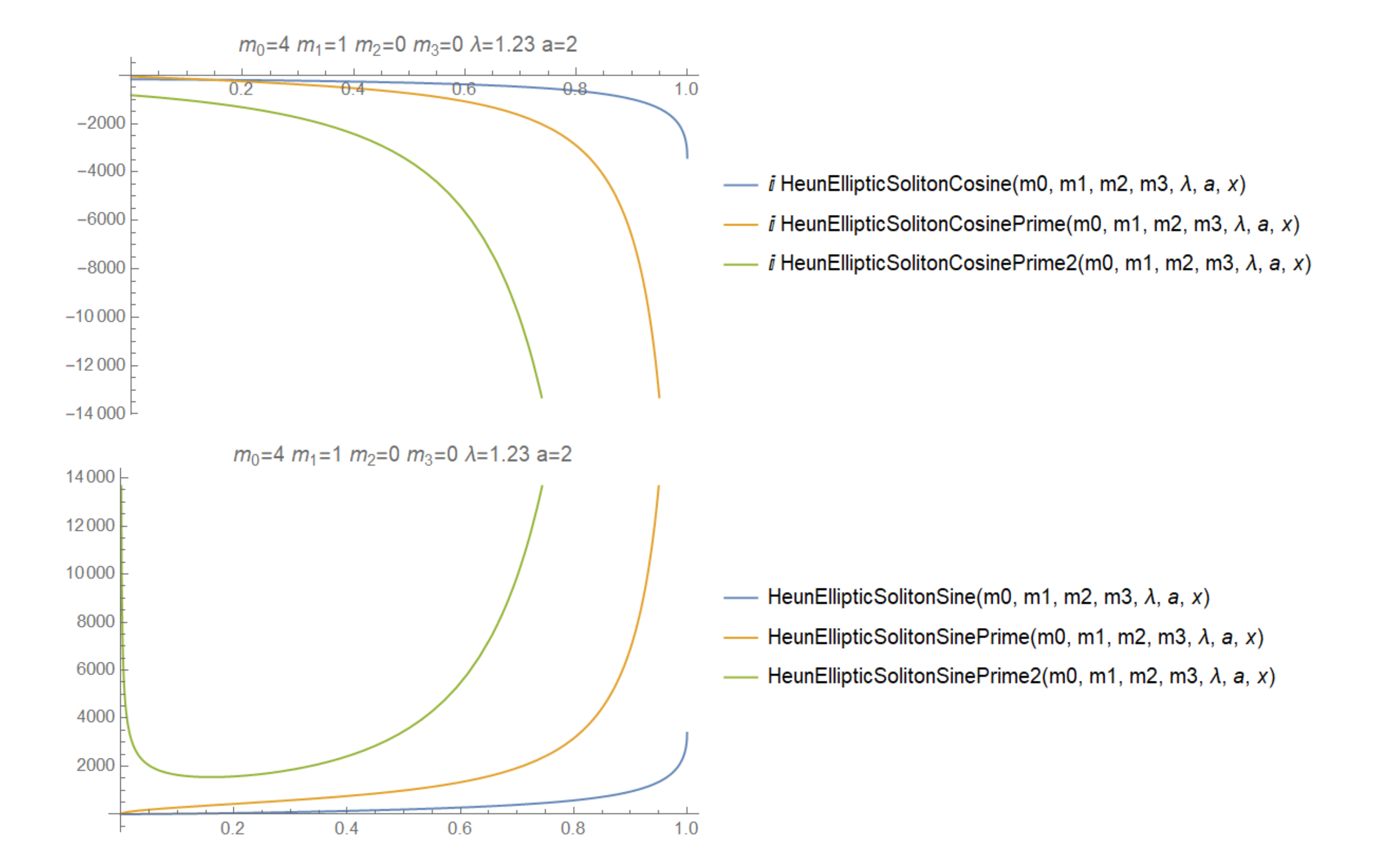
m_0=0 m_1=1 m_2=1 m_3=2 λ=1.23 a=2
60
40
20
-20
-40
-60
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=0 m_1=1 m_2=1 m_3=2 λ=1.23 a=2
60
40
20
-20
-40
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=1 m_2=1 m_3=1 λ=1.23 a=2
30
20
10
-10
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=1 m_2=1 m_3=1 λ=1.23 a=2
10
5
-5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



m_0=2 m_1=2 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=2 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=0 m_2=2 m_3=0 λ=1.23 a=2
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=0 m_2=2 m_3=0 λ=1.23 a=2
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



m_0=2 m_1=0 m_2=0 m_3=2 λ=1.23 a=2
150
100
50
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=2 m_1=0 m_2=0 m_3=2 λ=1.23 a=2
100
50
−50
−100
−150
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
i HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=3 m_1=0 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−200
−400
−600
−800
−1000
−1200
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=3 m_1=0 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
1000
500
−500
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)



m_0=4 m_1=1 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−2000
−4000
−6000
−8000
−10 000
−12 000
−14 000
i HeunEllipticSolitonCosine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
i HeunEllipticSolitonCosinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
m_0=4 m_1=1 m_2=0 m_3=0 λ=1.23 a=2
14 000
12 000
10 000
8000
6000
4000
2000
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
HeunEllipticSolitonSine(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)
HeunEllipticSolitonSinePrime2(m0, m1, m2, m3, λ, a, x)

Cas particulier où v(λ)=0

Dans ce cas les deux solutions construites ne sont plus indépendantes et l'on applique la formule de construction de la deuxième solution comme indiqué précédemment :

$$\begin{cases} y_1(z) = \sqrt{w(z)} \\ y_2(z) = \sqrt{w(z)} \times \int_z dt \, \dfrac{1}{w(t) f(t)} \end{cases}$$

Soit en substituant l'expression de f :

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{x} + \frac{1-2m_2}{x-1} + \frac{1-2m_3}{x-a}\right) \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x\,(1-x)(a-x)}}{x^{m_1}\,(1-x)^{m_2}\,(a-x)^{m_3}}$$

$$v^2(\lambda) = \frac{2\, w(x)\, w''(x) - (w'(x))^2 + 2\, p(x)\, w(x)\, w'(x) + 4\, q(x)\,(w(x))^2}{x^{2m_1-1}\,(x-1)^{2m_2-1}\,(x-a)^{2m_3-1}} = 0$$

$$\Rightarrow y_1(x) = \sqrt{w(x)} \qquad y_2(x) = \sqrt{w(x)} \int_0^x dt \, \frac{t^{m_1}\,(1-t)^{m_2}\,(a-t)^{m_3}}{w(t)\sqrt{t(1-t)(a-t)}}$$

Critère pour une solution polynomiale de l'équation au produit dans le cas d'une équation fuschienne plus générale à M+3 points singuliers réguliers à distance finie

On peut étendre le cas de l'équation de Heun à une équation fuschienne à M+3 points singuliers réguliers à distance finie. Une équation fuschienne à p points à distance finie prend la forme générale :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\right)y'(z)+\frac{V(z)}{\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)}\,y(z)=0 \quad V(z)=\alpha\ \beta\ z^{p-2}+v_{p-3}z^{p-3}+\ldots+v_0 \\ \alpha,\beta \text{ exposants du développement de Fröbenius à } z=\infty \quad \text{Contrainte de Fuchs} \quad \alpha+\beta+1=\sum_{l=1}^{l=p}\gamma_l \end{cases}$$

Avec M+3 points à distance finie, il vient :

$$\begin{cases} y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0 \quad p(z)=\sum_{l=1}^{l=M+3}\frac{\gamma_l}{z-a_l} \\ \alpha+\beta+1=\sum_{l=1}^{l=M+3}\gamma_l \qquad q(z)=\frac{V(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\prod_{l=4}^{l=M+3}(z-a_l)} \leftarrow V(z)=\alpha\ \beta\ z^{M+1}+v_M z^M+v_{M-1}z^{M-1}+\ldots+v_0 \end{cases}$$

On peut choisir une paramétrisation de p(z) comme suit :

$$\begin{array}{l} \gamma_1=\frac{1-2m_1}{2} \quad \gamma_2=\frac{1-2m_1}{2} \quad \gamma_3=\frac{1-2m_1}{2} \quad \gamma_{l+3}=-2\,n_l \quad l>0 \\ a_1=0 \quad a_2=1 \quad a_3=a \quad a_{l+3}=b_l \quad l>0 \\ \Rightarrow p(z)=\sum_{l=1}^{l=M+3}\frac{\gamma_l}{z-a_l}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{z}+\frac{1-2m_2}{z-1}+\frac{1-2m_3}{z-a}\right)-2\times\sum_{l=1}^{l=M}\frac{n_l}{z-b_l} \end{array}$$

où lorsque les valeurs de ml et nl sont entières les paramètres γ sont restreints à des valeurs entières ou demi-entières. La relation de Fuchs s'écrit : $\alpha+\beta+1=\frac{1}{2}(3-2m_1-2m_2-2m_3)-2\sum_{l=1}^{l=M}n_l$ *. On effectue une factorisation de q(z) de telle manière qu'il prend la forme suivante :*

$$q(z)=\frac{\lambda-\left(m_0+m_1+m_2+m_3+2\times\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)\left(m_0+1-m_1-m_2-m_3-2\times\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)z+R_M(z)}{4\,z\,(z-1)(z-a)}$$
$$\text{Avec} \quad R_M(z)=2\sum_{l=1}^{M}\frac{n_l\rho_l}{z-b_l}$$

En ajoutant en sus des paramètres n_l (entier), les paramètres ρ_l (réel) comme suit , on peut toujours trouver ces paramètres ρ_l par identification terme à terme au numérateur de l'expression suivante :

$$q(z)=\frac{\alpha\ \beta\ z^{M+1}+v_M z^M+v_{M-1}z^{M-1}+\ldots+v_0}{z(z-1)(z-a)\times\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)}=\frac{4\alpha\ \beta\ z\times\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)+\tilde{v}_M\times\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)+\tilde{v}_{M-1}z^{M-1}+\ldots+\tilde{v}_0}{4\,z(z-1)(z-a)\times\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)}$$

$$\Rightarrow q(z)=\frac{\tilde{v}_M+4\,\alpha\ \beta\ z+\frac{\tilde{v}_{M-1}z^{M-1}+\ldots+\tilde{v}_0}{\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)}}{4\,z(z-1)(z-a)}=\frac{\lambda+4\alpha\ \beta\ z+R_M(z)}{4z(z-1)(z-a)} \quad avec \quad R_M(z)=\frac{\tilde{v}_{M-1}z^{M-1}+\ldots+\tilde{v}_0}{\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)}=2\sum_{l=1}^{M}\frac{n_l\rho_l}{z-b_l}$$

Rajoutons le paramètre global N (qui va gouverner le degré du polynôme solution de l'équation au produit) et continuons le calcul :

$$\text{Posons} \quad N = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + 2\sum_{l=1}^{l=M} n_l$$

$$\text{De telle manière que} \quad -4\,\alpha\,\beta = \left(m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + 2\sum_{l=1}^{l=M} n_l\right)\left(2m_0 + 1 - m_0 - m_1 - m_2 - m_3 - 2\sum_{l=1}^{l=M} n_l\right) = N(2m_0 + 1 - N)$$

$$\Rightarrow q(z) = \frac{\lambda - N(2m_0 + 1 - N)\,z + R_M(z)}{4\,z\,(z-1)(z-a)}$$

Deux choix sont alors équivalent pour les exposants à l'infini α,β :

$$2\alpha = -\left(m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + 2\sum_{l=1}^{l=M} n_l\right) = -N \qquad 2\beta = 2m_0 + 1 - m_0 - m_1 - m_2 - m_3 - 2\sum_{l=1}^{l=M} n_l = 2m_0 + 1 - N$$

Les termes de l'équation différentielle « au produit » du troisième degré sont de la forme :

$$p'(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{z^2} + \frac{1-2m_2}{(z-1)^2} + \frac{1-2m_3}{(z-a)^2}\right) + 2\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l}{(z-b_l)^2}$$

$$2p^2(z) = 2\times\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a}\right) - 2\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l}{z-b_l}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-2m_1)^2}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{(1-2m_2)^2}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{(1-2m_3)^2}{(z-a)^2} + \frac{(1-2m_1)(1-2m_2)}{z(z-1)} + \frac{(1-2m_2)(1-2m_3)}{(z-1)(z-a)} + \frac{(1-2m_1)(1-2m3)}{z(z-a)}$$

$$+ 8\times\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l^{\,2}}{(z-b_l)^2} + 8\times\sum_{l=1}^{l=M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{k=M} \frac{n_l n_k}{(z-b_l)(z-b_k)} - 4\times\left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a}\right)\times\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l}{z-b_l}$$

$$p'(z) + 2p^2(z) + 4q(z) = -\frac{(1-2m_1)\,m_1}{z^2} - \frac{(1-2m_2)\,m_2}{(z-1)^2} - \frac{(1-2m_3)\,m_3}{(z-a)^2} + \frac{(1-2m_1)(1-2m_2)}{z(z-1)} + \frac{(1-2m_2)(1-2m_3)}{(z-1)(z-a)} + \frac{(1-2m_1)(1-2m3)}{z(z-a)} +$$

$$+ 2\times\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l(1+4n_l)}{(z-b_l)^2} + 8\times\sum_{l=1}^{l=M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{k=M} \frac{n_l n_k}{(z-b_l)(z-b_k)} - 4\times\left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a}\right)\times\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l}{z-b_l} + \frac{\lambda - N(2m_0 + 1 - N)\,z + 2\sum_{l=1}^{N} \frac{n_l\rho_l}{z-b_l}}{z\,(z-1)(z-a)}$$

$$2p(z)\,q(z) + q'(z) = \left(\frac{1-2m_1}{z} + \frac{1-2m_2}{z-1} + \frac{1-2m_3}{z-a} - 4\times\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l}{z-b_l} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a}\right)\times\left(\frac{\lambda - N(2m_0 + 1 - N)\,z + 2\sum_{l=1}^{N} \frac{n_l\rho_l}{z-b_l}}{4\,z\,(z-1)(z-a)}\right) +$$

$$+ \frac{-N(2m_0 + 1 - N) - 2\sum_{l=1}^{l=M} \frac{n_l\rho_l}{(z-b_l)^2}}{4\,z\,(z-1)(z-a)}$$

En multipliant par : $z^2(z-1)^2(z-a)^2\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)^2$ *l'équation différentielle du troisième degré :*

$$E(z)=w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+2\times\left(2p(z)\,q(z)+q'(z)\right)w(z)=0$$

et en injectant un monôme de degré p, l'équation donne un terme maximal de z^{2M+p+3}*, dont l'annulation donne l'équation algébrique suivante :*

$$Terme\quad z^{3+2M+p}\rightarrow Facteur=z^2(z-1)^2(z-a)^2\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)^2$$

$$Terme\quad Facteur\times w^{(3)}(z)\rightarrow p(p-1)(p-2)$$

$$Terme\quad Facteur\times 3p(z)\,w''(z)\rightarrow 3\left(\frac{1-2m_1}{2}+\frac{1-2m_2}{2}+\frac{1-2m_3}{2}-2\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)p(p-1)=3(\alpha+\beta+1)p(p-1)$$

$$Terme\quad Facteur\times\left(p'(z)+2p^2(z)+4\,q(z)\right)w'(z)\rightarrow\left(2\left(\frac{1-2m_1}{2}+\frac{1-2m_2}{2}+\frac{1-2m_3}{2}-2\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)^2-\left(\frac{1-2m_1}{2}+\frac{1-2m_2}{2}+\frac{1-2m_3}{2}-2\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)+4\,\alpha\,\beta\right)p=$$

$$=\left(2(\alpha+\beta+1)^2-(\alpha+\beta+1)+4\,\alpha\,\beta\right)p$$

$$Terme\quad Facteur\times 2\times\left(2p(z)\,q(z)+q'(z)\right)\rightarrow 2\times\left(-2(m_1+m_2+m_3)-4\times\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)\times\alpha\,\beta+2\times\alpha\,\beta=4\times\alpha\,\beta\times(\alpha+\beta)$$

$$Terme\quad z^{3+2M+p}=0\rightarrow p(p-1)(p-2)+3(\alpha+\beta+1)p(p-1)+\left(2(\alpha+\beta+1)^2-(\alpha+\beta+1)+4\,\alpha\,\beta\right)p+4\times\alpha\,\beta\times(\alpha+\beta)=0$$

$$\Leftrightarrow(2\alpha+p)(\alpha+\beta+p)(2\beta+p)=0$$

$$Terme\quad z^{3+2M+p}=0\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=-p\\2\beta=p+1-2m_1-2m_2-2m_3-4\sum_{l=1}^{l=M}n_l\end{cases}\quad ou\quad\begin{cases}2\alpha=p+1-2m_1-2m_2-2m_3-4\sum_{l=1}^{l=M}n_l\\2\beta=-p\end{cases}$$

$$Deux\ choix\ \acute{e}quivalents\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=-p\\2\beta=p+1-2m_1-2m_2-2m_3-4\sum_{l=1}^{l=M}n_l\end{cases}$$

Avec le choix réalisé plus haut pour les paramètres α,β (exposant à l'infini) :

$$2\alpha=-\left(m_0+m_1+m_2+m_3+2\sum_{l=1}^{l=M}n_l\right)=-N\qquad 2\beta=2m_0+1-m_0-m_1-m_2-m_3-2\sum_{l=1}^{l=M}n_l=2m_0+1-N$$

On voit que p=N et donc que N désigne clairement le degré du polynôme recherché. A ce stade l'expression de $R_M(z)$ *importe peu et aurait pu être dans l'équation fuschienne de la forme :*

$$p(z)=\frac{\gamma_1}{z-a_1}+\frac{\gamma_2}{z-a_2}+\frac{\gamma_3}{z-a_3}+\sum_{l=1}^{l=M}\frac{\eta_l}{z-b_l}\qquad q(z)=\frac{\lambda+\alpha\,\beta\,z+R_M(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\qquad R_M(z)=\sum_{l=1}^{M}\frac{\kappa_l}{z-b_l}$$

$$M+3\quad points\ singuliers\ r\acute{e}guliers\ \grave{a}\ distance\ finie\qquad Relation\ de\ Fuchs\quad \alpha+\beta+1=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\sum_{l=1}^{l=M}\eta_l$$

$$q(z)=\frac{\lambda+\alpha\,\beta\,z+R_M(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}=\frac{\alpha\,\beta\,z^{M+1}+P_M(z)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)}\qquad P_M(z)\quad polyn\hat{o}me\ de\ degr\acute{e}\ M\ en\ z$$

La condition d'existence d'une solution polynomiale de degré p du « produit », obtenue avec multiplication par le facteur $(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2\prod_{l=1}^{l=M}(z-b_l)^2$ *et annulation du terme de puissance maximale* z^{3+2M+p} *s'écrirait alors :* $2\alpha=-p\qquad 2\beta=2\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\sum_{l=1}^{l=M}\eta_l\right)-2+p$

Solutions hypergéométriques liées à une forme alternative des paramètres de l'équation de Heun

Certains auteurs substituent parfois le point singulier régulier a par 1/k² dans l'optique justement du passage à la forme jacobienne elliptique de l'équation de Heun :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$
$$a=\frac{1}{k^2}\Rightarrow y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta}{1-z}-\frac{k^2\varepsilon}{1-k^2z}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ k^2z-k^2q)}{z(1-z)(1-k^2z)}y(z)=0$$
$$s=-k^2q\Rightarrow y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta}{1-z}-\frac{k^2\varepsilon}{1-k^2z}\right\}y'(z)+\frac{(s+\alpha\ \beta\ k^2z)}{z(1-z)(1-k^2z)}y(z)=0$$

Avec le nouveau paramètre s, la forme jacobienne elliptique devient :

$$y''(\mu)+\left\{(2\gamma-1)\frac{cn(\mu,k)dn(\mu,k)}{sn(\mu,k)}-(2\delta-1)\frac{sn(\mu,k)dn(\mu,k)}{cn(\mu,k)}-(2\varepsilon-1)\,k^2\,\frac{sn(\mu,k)cn(\mu,k)}{dn(\mu,k)}\right\}y'(\mu)+4\left(s+\alpha\ \beta\ k^2sn^2(\mu,k)\right)y(\mu)=0$$

Avec cette forme alternative du point singulier a, faisons tendre k vers 0 soit a vers l'infini, tout en garantissant que le paramètre s reste fini mais non nul :

$$\begin{cases}\lim\limits_{k\to 0}\quad y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta}{1-z}-\frac{k^2\varepsilon}{1-k^2z}\right\}y'(z)+\frac{(s+\alpha\ \beta\ k^2z)}{z(1-z)(1-k^2z)}y(z)=0\\ \lim\limits_{k\to 0}\quad -k^2q=s\end{cases}$$
$$\Rightarrow y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{s}{z(1-z)}y(z)=0$$

Si l'on se rapproche de l'équation hyper-géométrique :

$$y''(z)+\left\{\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{a\,b}{z(z-1)}y(z)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}s=a\,b\\ c=\gamma\\ a+b-c+1=\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=-a\,b\\ a+b=\delta+\gamma-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=a\,b\\ a^2-a(\delta+\gamma-1)-s=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow a=\frac{(\delta+\gamma-1)\pm\sqrt{(\delta+\gamma-1)^2+4s}}{2}\quad Posons\quad \rho=\frac{\delta+\gamma-1}{2}\Rightarrow a=\rho\pm\sqrt{\rho^2+s}$$

Il est évident que a et b prennent les valeurs des deux choix possibles, il vient donc une solution hyper-géométrique de la forme :

$$\begin{cases}y(z)=HeunG_l\left(k^2\to 0,s\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z\right)={}_2F_1\left(\rho+\sqrt{\rho^2+s},\rho-\sqrt{\rho^2+s};\gamma\,;z\right)\\ \rho=\frac{\delta+\gamma-1}{2}\qquad\forall\alpha,\beta\end{cases}$$

Lorsque k tend vers 1, soit lorsque a tend vers 1, l'équation de Heun devient $y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta+\varepsilon}{1-z}\right\}y'(z)+\frac{(s+\alpha\,\beta\,z)}{z(1-z)^2}y(z)=0$.

Lorsque s=-α β, alors l'équation devient : $y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}-\frac{\delta+\varepsilon}{1-z}\right\}y'(z)-\frac{\alpha\,\beta}{z(1-z)}y(z)=0$, *et dans ce cas l'équation se rapproche facilement de l'équation hypergéométrique avec les paramètres:* $a=\alpha\quad b=\beta\quad c=\gamma$. *Donc* $y(z)=HeunG_l(1,-\alpha\,\beta\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)={}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma\,;z)$. *Mais ce cas a déjà été traité auparavant.*

Toutefois sans même fixer la valeur de s, cette équation est également assimilable à une équation hypergéométrique moyennant certaines transformation. Partons de l'équation hyper-géométrique formons la transformation suivante de fonction, et assignons les paramètres recherchés. Il vient :

$$y''(z)+\left\{\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1}{z-1}\right\}y'(z)+\frac{a\,b}{z(z-1)}y(z)=0$$

$$y(z)=(1-z)^{-r}g(z)\quad y'(z)=r(1-z)^{-r-1}g(z)+(1-z)^{-r}g'(z)\quad y''(z)=r(r+1)(1-z)^{-r-2}g(z)+2r(1-z)^{-r-1}g'(z)+(1-z)^{-r}g''(z)$$

$$\Rightarrow g''(z)+\left\{\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1-2r}{z-1}\right\}g'(z)+\left(\frac{a\,b}{z(z-1)}+\frac{r(r+1)}{(z-1)^2}+\frac{r}{1-z}\left(\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1}{z-1}\right)\right)g(z)=0$$

$$\Rightarrow g''(z)+\left\{\frac{c}{z}+\frac{a+b-c+1-2r}{z-1}\right\}g'(z)+\frac{rc-ab+z\,(r-a)(r-b)}{z(z-1)^2}g(z)=0$$

$$\begin{cases}c=\gamma\qquad s=rc-ab\\ \alpha\,\beta=(r-a)(r-b)\\ a+b-c+1-2r=\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1-\gamma\\ \Rightarrow a+b=\alpha+\beta+2r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r^2+r(\alpha+\beta-\gamma)+(s+\alpha\,\beta)=0\leftarrow\rho=\dfrac{\gamma-\alpha-\beta}{2}\\ \Rightarrow r^2-2\rho\,r+(s+\alpha\,\beta)=0\end{cases}\Rightarrow r=\rho\pm\sqrt{\rho^2-(s+\alpha\,\beta)}$$

$$\alpha\,\beta=(r-a)(r-b)\Rightarrow\begin{cases}r-a=-\alpha\\ r-b=-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=r+\alpha\\ b=r+\beta\end{cases}$$

Ainsi la fonction de Heun $y(z)=HeunG_l(1,s\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)$ *peut s'écrire sous la forme d'une fonction hyper-géométrique quelque soit la valeur de s :*

$$\begin{cases}y(z)=HeunG_l(1,s\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)=(1-z)^{r^{\pm}}\,{}_2F_1(r^{\pm}+\alpha,r^{\pm}+\beta\,;\gamma\,;z)\\ r^{\pm}=\rho\pm\sqrt{\rho^2-(s+\alpha\,\beta)}\qquad\rho=\dfrac{\gamma-\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

Développement de solutions de l'équation de Heun en fonctions hypergéométriques

La première mention d'un développement possible est donnée par N.Svartholm en 1939 dans son article rédigé en allemand : « Die Lösung der Fuchsschen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch hypergeometrische Polynome ». En fin d'article l'auteur propose un développement de solution à l'équation de Heun sous la forme :

$$y(z)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu \; {}_2F_1(-\nu,\nu+1-\alpha_1-\alpha_2\,;1-\alpha_1\,;z)$$

$$\gamma=1-\alpha_1 \quad \delta=1-\alpha_2 \quad \nu\to j \Rightarrow y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; {}_2F_1(-j,j+\delta+\gamma-1\,;\gamma\,;z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; {}_2F_1(j+\delta+\gamma-1,-j\,;\gamma\,;z)$$

Notons au passage que ce développement peut également s'écrire à l'aide des polynômes de Jacobi comme suit :

$$P_\nu^{(-\alpha_1,-\alpha_2)}(2z-1)\propto {}_2F_1(-\nu,\nu+1-\alpha_1-\alpha_2\,;1-\alpha_1\,;z)\Rightarrow y(z)\propto\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu \; P_\nu^{(-\alpha_1,-\alpha_2)}(2z-1)\Rightarrow y(z)\propto\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_\nu^{(\gamma-1,\delta-1)}(2z-1)$$

Quelques années plus tard en 1944 A.Erdélyi publie dans son article « CERTAIN EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF THE HEUN EQUATION » une étude plus systématique des développements de la forme :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; {}_2F_1(\lambda+j,\mu-j;\gamma;z)$$

Je vais donner les principaux résultats établis par A.Erdélyi et les relier au développement proposé par N.Svartholm. Les fonctions de base du développement d'Erdélyi sont au nombre de 6 catégories :

$$\begin{cases}
P_j^1(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(1-\mu+j)}\;{}_2F_1(\lambda+j,\mu-j;\gamma;z)\\
P_j^2(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(\gamma-\mu+j)}z^{1-\gamma}\;{}_2F_1(1-\gamma+\lambda+j,1-\gamma+\mu-j;2-\gamma;z)\\
P_j^3(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(1-\mu+j)}\dfrac{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(\gamma-\mu+j)}\;{}_2F_1(\lambda+j,\mu-j;\gamma;1-z)\\
P_j^4(z)=(1-z)^{1-\delta}\;{}_2F_1(1-\delta+\lambda+j,1-\delta+\mu-j;2-\delta;1-z)\\
P_j^5(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(1+\lambda-\mu+2j)}z^{-\lambda-j}\;{}_2F_1\left(\lambda+j,1-\gamma+\lambda+j;1+\lambda-\mu+2j;\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\gamma+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda-\mu)}\dfrac{(\lambda)_j(1-\gamma+\lambda)_j}{(1+\lambda-\mu)_{2j}}z^{-\lambda-j}\;{}_2F_1\left(\lambda+j,1-\gamma+\lambda+j;1+\lambda-\mu+2j;\dfrac{1}{z}\right)\\
P_j^6(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda-\mu+2j)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)}z^{-\mu+j}\;{}_2F_1\left(\mu-j,1-\gamma+\mu-j;1-\lambda+\mu-2j;\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\gamma-\mu)}\dfrac{(\lambda-\mu)_{2j}}{(1-\mu)_j\Gamma(\gamma-\mu)_j}z^{-\mu+j}\;{}_2F_1\left(\mu-j,1-\gamma+\mu-j;1-\lambda+\mu-2j;\dfrac{1}{z}\right)
\end{cases}$$

On forme toute combinaison linéaire de ces 6 types de fonctions : $P_j(z)=\sum_{l=1}^{l=6}\pi_l P_j^l(z)$

Ces six catégories de fonctions et leurs combinaisons linéaires quelconque respectent l'équation différentielle hypergéométrique suivante :

$$z\,(z-1)\left\{P_j''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}P_j'(z)\right\}+(\lambda+j)(\mu-j)P_j(z)=0$$

Remarque : toutes les fonctions $P_j(z)$ *font partie des 24 solutions données par Kummer pour l'équation hypergéométrique.*

Pour cette même fonction l'équation fonctionnelle suivante est vérifiée (ce qui est le plus difficile à prouver en terme de calcul) :

$$\begin{cases}\varepsilon\, z\,(z-1)\,P_j'(z)+\{\alpha\,\beta\, z-q-(\lambda+j)(\mu-j)(z-a)\}\,P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+(L_j-q)\,P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)\\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon\end{cases}$$

où les trois coefficients K,L,M sont indépendants de l'argument z et seulement fonctions des paramètres α,β,γ,δ,ε,λ,μ et j :

$$\begin{cases}K_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu-1)(j+\beta-\mu-1)(j+\gamma-\mu-1)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu-1)(2j+\lambda-\mu-2)}\\ L_j=a(\lambda+j)(\mu-j)+\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\\ M_j=\dfrac{(j-\alpha+\lambda+1)(j-\beta+\lambda+1)(j-\gamma+\lambda+1)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu+1)(2j+\lambda-\mu+2)}\end{cases}$$

On peut aussi écrire l'équation fonctionnelle sous une forme légèrement plus « condensée » :

$$\begin{cases}\varepsilon\, z\,(z-1)\,P_j'(z)+\{\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j)\}\,z\,P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+\Lambda_j\,P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)\\ K_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu-1)(j+\beta-\mu-1)(j+\gamma-\mu-1)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu-1)(2j+\lambda-\mu-2)}\\ \Lambda_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\\ M_j=\dfrac{(j-\alpha+\lambda+1)(j-\beta+\lambda+1)(j-\gamma+\lambda+1)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu+1)(2j+\lambda-\mu+2)}\\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon\end{cases}$$

Alors tout développement de cette forme vérifie une loi de récurrence à trois termes, ainsi que sa condition initiale et une contrainte supplémentaire, comme suit :

$$\begin{cases} y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j(z) \\ M_{-1}P_{-1}(z)\equiv 0 \\ (L_0-q)\,c_0+M_0c_1=0 \\ K_jc_{j-1}+(L_j-q)\,c_j+M_jc_{j+1}=0 \end{cases}$$

Comme donnée plus haut les expressions littérales des trois coefficients K,L,M sont les suivantes :

$$\begin{cases} K_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu-1)(j+\beta-\mu-1)(j+\gamma-\mu-1)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu-1)(2j+\lambda-\mu-2)} \\ L_j=a(\lambda+j)(\mu-j)+\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)} \\ M_j=\dfrac{(j-\alpha+\lambda+1)(j-\beta+\lambda+1)(j-\gamma+\lambda+1)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu+1)(2j+\lambda-\mu+2)} \end{cases}$$

<u>Démonstration partielle pour l'établissement de la récurrence</u>

Nous allons supposer que la relation fonctionnelle entre la dérivée première de la fonction et la fonction $P_n'(z),P_n(z)$ *et ses plus proches voisins* $P_{j-1}(z),P_{j+1}(z)$ *a lieu. Du développement* $y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j(z)$*, appliquons l'équation différentielle des fonctions de hypergéométriques servant de base:* $z\,(z-1)\left\{P_j''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}P_j'(z)\right\}+(\lambda+j)(\mu-j)P_j(z)=0$*, ainsi que l'équation fonctionnelle :*

$$\varepsilon\; z\,(z-1)\,P_j'(z)+\{\alpha\;\beta\;z-q-(\lambda+j)\,(\mu-j)\,(z-a)\}\,P_j(z)=K_{j+1}\;P_{j+1}(z)+(L_j-q)\,P_j(z)+M_{j-1}\;P_{j-1}(z)$$

dans l'équation différentielle de Heun :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{\alpha\;\beta\;z-q}{z(z-1)(z-a)}\;y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow z(z-1)(z-a)\,y''(z)+z(z-1)(z-a)\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+(\alpha\;\beta\;z-q)\,y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &z(z-1)(z-a)\left(y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}y'(z)\right)+(z-a)(\lambda+j)(\mu-j)\,y(z) \\ &+z\,(z-1)\,\varepsilon\;y'(z)+(\alpha\;\beta\;z-q-(z-a)(\lambda+j)(\mu-j))\,y(z)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \left(\begin{aligned} &(z-a)\left\{z(z-1)\left(P_j''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}P_j'(z)\right)+(\lambda+j)(\mu-j)\,P_j(z)\right\} \\ &+z\,(z-1)\,\varepsilon\;P_j'(z)+(\alpha\;\beta\;z-q-(z-a)(\lambda+j)(\mu-j))\,P_j(z) \end{aligned}\right)=0$$

Il vient :

$$Comme \quad z(z-1)\left\{P_j''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right\}P_j'(z)\right\}+(\lambda+j)(\mu-j)P_j(z)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\left(z(z-1)\,\varepsilon\, P_j'(z)+\left(\alpha\,\beta\, z-q-(\lambda+j)(\mu-j)(z-a)\right)P_j(z)\right)=0$$

$$Comme \quad \varepsilon\, z(z-1)P_j'(z)+\{\alpha\,\beta\, z-q-(\lambda+j)(\mu-j)(z-a)\}P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+(L_j-q)P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\left(K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+(L_j-q)P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)\right)=0$$

$$Terme \quad P_j(z)\to K_j c_{j-1}+(L_j-q)c_j+M_j\,c_{j+1}$$

Cela implique donc la nullité des termes de chaque fonction de Base P_j et donc la relation de récurrence sur les coefficients c_j : $K_j c_{j-1}+(L_j-q)c_j+M_j c_{j+1}=0$. *Cette relation de récurrence est complétée par la condition d'observation de l'équation de Heun : soit :* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\left(K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+(L_j-q)P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)\right)=0 \Rightarrow M_{-1}P_{-1}(z)\equiv 0$ *et le départ de la récurrence en j=0 devient alors :* $Terme \quad P_0(z)\to (L_0-q)c_0+M_0\,c_1 \Rightarrow (L_0-q)c_0+M_0 c_1=0$.

Vous l'avez compris le plus difficile est de montrer qu'a lieu la relation fonctionnelle :

$$\varepsilon\, z(z-1)P_j'(z)+\{\alpha\,\beta\, z-q-(\lambda+j)(\mu-j)(z-a)\}P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+(L_j-q)P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)$$

C'est ce que nous allons démontrer enfin de secteur concernant les développements d'Erdélyi et de Svartholm.

La contrainte $M_{-1}P_{-1}(z)\equiv 0$ *se traduit par une condition sur les paramètres :* $\lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon$

Dans certains cas c'est le coefficient M_{-1} qui s'annule dans d'autre c'est la fonction $P_{-1}(z)$ qui est identiquement nulle :

$$\begin{cases} P_{-1}^1(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(-\mu)}\,{}_2F_1(\lambda-1,\mu+1;\gamma;z) \qquad P_{-1}^2(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(-\gamma+\lambda)}{\Gamma(\gamma-\mu-1)}z^{1-\gamma}\,{}_2F_1(-\gamma+\lambda,2-\gamma+\mu;2-\gamma;z) \\ P_{-1}^3(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda-1)\,\Gamma(-\gamma+\lambda)}{\Gamma(-\mu)\,\Gamma(\gamma-\mu-1)}{}_2F_1(\lambda-1,\mu+1;\gamma;1-z) \qquad P_{-1}^4(z)=(1-z)^{1-\delta}\,{}_2F_1(-\delta+\lambda,2-\delta+\mu;2-\delta;1-z) \\ P_{-1}^5(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda-1)\Gamma(-\gamma+\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu-1)}z^{-\lambda-j}\,{}_2F_1\left(\lambda-1,-\gamma+\lambda;\lambda-\mu-1;\dfrac{1}{z}\right) \qquad P_{-1}^6(z)=\dfrac{\Gamma(\lambda-\mu-2)}{\Gamma(-\mu)\Gamma(\gamma-\mu-1)}z^{-\mu+j}\,{}_2F_1\left(\mu+1,2-\gamma+\mu;3-\lambda+\mu;\dfrac{1}{z}\right) \end{cases}$$

Cela conduit aux deux situations suivantes :

Situation I : $\begin{cases} \lambda = \alpha & \mu = \beta - \varepsilon \\ \lambda = \beta & \mu = \alpha - \varepsilon \end{cases}$, *dans ce cas effectivement :* $M_{-1} = \dfrac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-1)}{(\lambda-\mu-1)(\lambda-\mu)} = 0$ *et toutes les fonctions* P_m *conviennent*

Situation II : $\begin{cases} \lambda = \gamma + \delta - 1 & \mu = 0 \\ \lambda = \gamma & \mu = \delta - 1 \\ \lambda = \delta & \mu = \gamma - 1 \\ \lambda = 1 & \mu = \gamma + \delta - 2 \end{cases}$

Lorsque $\lambda = \gamma + \delta - 1 \quad \mu = 0$ *:*

Seules trois fonctions P_{-1} *sont identiquement nulles, alors que le coefficient* M_{-1} *ne s'annule pas :*

$$\begin{cases} P_{-1}^{1}(z) \equiv 0 & P_{-1}^{3}(z) \equiv 0 & P_{-1}^{6}(z) \equiv 0 \\ P_{-1}^{2}(z) \neq 0 & P_{-1}^{4}(z) \neq 0 & P_{-1}^{5}(z) \end{cases}$$

Lorsque $\lambda = \gamma \quad \mu = \delta - 1$ *alors la condition* $M_{-1} = \dfrac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-1)}{(\lambda-\mu-1)(\lambda-\mu)} = 0$ *est respectée et toutes les fonctions* P_m *conviennent de facto*

Lorsque $\lambda = 1 \quad \mu = \gamma + \delta - 2$ *alors la condition* $M_{-1} = \dfrac{(\lambda-\widetilde{\alpha})(\lambda-\widetilde{\beta})(\lambda-\gamma)(\lambda-1)}{(\lambda-\mu-1)(\lambda-\mu)} = 0$ *est respectée et toutes les fonctions* P_m *conviennent également*

Lorsque $\lambda = \delta \quad \mu = \gamma - 1$*, seules trois fonctions* P_{-1} *sont identiquement nulles, alors que le coefficient* M_{-1} *ne s'annule pas :* $\begin{cases} P_{-1}^{1}(z) \neq 0 & P_{-1}^{4}(z) \neq 0 & P_{-1}^{5}(z) \neq 0 \\ P_{-1}^{2}(z) \equiv 0 & P_{-1}^{3}(z) \equiv 0 & P_{-1}^{6}(z) \equiv 0 \end{cases}$

Lien avec les travaux de Svartholm

On retrouve la récurrence introduite quelques années auparavant par Svartholm en 1939 dans la construction des séries de type II. Pour cela plaçons nous dans le cas $\lambda = \gamma + \delta - 1 \qquad \mu = 0$ ·

Svartholm expose en réalité une série de la forme : $y_{Svartholm}(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \widetilde{c}_j \;{}_2F_1(-j, j+\gamma+\delta-1;\gamma;z)$ *qui coïncide (à une constante multiplicative près) avec la série d'Erdélyi de la forme* $y_{Erdélyi}(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^1(z)$

Dans ce cas les relations de récurrence peuvent alors s'écrire : $\begin{cases} K_j c_{j-1} + (L_j - q)c_j + M_j c_{j+1} = 0 \\ \widetilde{K}_j \widetilde{c}_{j-1} + (\widetilde{L}_j - q)\widetilde{c}_j + \widetilde{M}_j \widetilde{c}_{j+1} = 0 \end{cases}$

Comme

$$y_{Svartholm}(z) = y_{Erdélyi}(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \widetilde{c}_j \;{}_2F_1(-j, j+\gamma+\delta-1;\gamma;z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \,(-1)^j \frac{\Gamma(\gamma+\delta+j-1)}{\Gamma(1+j)} {}_2F_1(-j, j+\gamma+\delta-1;\gamma;z)$$
$$\Rightarrow \widetilde{c}_j = (-1)^j \frac{\Gamma(\gamma+\delta-1+j)}{\Gamma(1+j)} c_j$$

Il vient donc :

$$K_j c_{j-1} + L_j c_j + M_j c_{j+1} = -(-1)^j \frac{\Gamma(\gamma+\delta+j-2)}{\Gamma(j)} c_{j-1} \widetilde{K}_j + (-1)^j \frac{\Gamma(\gamma+\delta+j-1)}{\Gamma(1+j)} c_j \widetilde{L}_j - (-1)^j \frac{\Gamma(\gamma+\delta+j)}{\Gamma(2+j)} c_{j+1} \widetilde{M}_j = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widetilde{K}_j = -K_j \dfrac{\Gamma(j)}{\Gamma(\gamma+\delta+j-2)} \dfrac{\Gamma(\gamma+\delta+j-1)}{\Gamma(1+j)} = -K_j \dfrac{\gamma+\delta+j-2}{j} \\ \widetilde{L}_j = L_j \\ \widetilde{M}_j = -M_j \dfrac{\Gamma(2+j)}{\Gamma(\gamma+\delta+j)} \dfrac{\Gamma(\gamma+\delta+j-1)}{\Gamma(1+j)} = -M_j \dfrac{1+j}{\gamma+\delta+j-1} \end{cases}$$

Ce qui conduit à la récurrence suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{K}_j = -\dfrac{(j+\alpha-1)(j+\beta-1)(j+\gamma-1)(\gamma+\delta+j-2)}{(2j+\gamma+\delta-2)(2j+\gamma+\delta-3)} \\ \widetilde{L}_j = -a\; j\,(\gamma+\delta-1+j) + \dfrac{(j+\alpha)(j+\beta)(j+\gamma)(j+\lambda)}{(2j+\lambda)(2j+\lambda+1)} + \dfrac{(j-\alpha+\gamma+\delta-1)(j-\beta+\gamma+\delta-1)(j+\delta-1)\,j}{(2j+\lambda)(2j+\lambda-1)} \\ \widetilde{M}_j = -\dfrac{(j-\alpha+\gamma+\delta)(j-\beta+\gamma+\delta)(j+\delta)(1+j)}{(2j+\gamma+\delta)(2j+\gamma+\delta+1)} \end{cases}$$

Avec la substitution d'indice j->v et le changement global de signe opéré par l'auteur et q=h selon les notations de Svartholm, il vient :

$$\begin{cases}\widetilde{K}_j=\dfrac{(\nu+\gamma-1)(\nu+\gamma+\delta-2)(\nu+\alpha-1)(\nu+\beta-1)}{(2\nu+\gamma+\delta-2)(2\nu+\gamma+\delta-3)}\\ \widetilde{L}_j=a\,\nu\,(\gamma+\delta-1+\nu)-\dfrac{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)(\nu+\gamma)(\nu+\lambda)}{(2\nu+\lambda)(2\nu+\lambda+1)}-\dfrac{(\nu-\alpha+\gamma+\delta-1)(\nu-\beta+\gamma+\delta-1)(\nu+\delta-1)\,j}{(2\nu+\lambda)(2\nu+\lambda-1)}\\ \widetilde{M}_j=\dfrac{(\nu+\delta)(1+\nu)(\nu-\alpha+\gamma+\delta)(\nu-\beta+\gamma+\delta)}{(2\nu+\gamma+\delta)(2\nu+\gamma+\delta+1)}\end{cases}$$

$$Comme\quad\begin{cases}(\nu+\alpha-1)(\nu+\beta-1)=(\nu-1)(\nu+\gamma+\delta-2)+\alpha\,\beta\\ (\nu-\alpha+\gamma+\delta)(\nu-\beta+\gamma+\delta)=(\nu-\varepsilon+1)(\nu+\gamma+\delta)+\alpha\,\beta\\ a\,\nu\,(\nu+\gamma+\delta-1)-\dfrac{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)(\nu+\gamma)(\nu+\lambda)}{(2\nu+\lambda)(2\nu+\lambda+1)}-\dfrac{(\nu-\alpha+\gamma+\delta-1)(\nu-\beta+\gamma+\delta-1)(\nu+\delta-1)\,j}{(2\nu+\lambda)(2\nu+\lambda-1)}=\\ =-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\gamma-\delta)(\nu(\nu+\gamma+\delta-1)(\gamma+\delta+2\varepsilon-2)+(\gamma+\delta-2)\,\alpha\,\beta)}{(2\nu+\gamma+\delta-2)(2\nu+\gamma+\delta)}+(1-2a)\,\nu\,(\nu+\gamma+\delta-1)+\alpha\,\beta\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\widetilde{K}_j=\dfrac{(\nu+\gamma-1)(\nu+\gamma+\delta-2)((\nu-1)(\nu+\gamma+\delta-2)+\alpha\,\beta)}{(2\nu+\gamma+\delta-3)(2\nu+\gamma+\delta-2)}\\ \widetilde{L}_j=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\gamma-\delta)(\nu(\nu+\gamma+\delta-1)(\gamma+\delta+2\varepsilon-2)+(\gamma+\delta-2)\,\alpha\,\beta)}{(2\nu+\gamma+\delta-2)(2\nu+\gamma+\delta)}+(1-2a)\,\nu\,(\nu+\gamma+\delta-1)+\alpha\,\beta\right)\\ \widetilde{M}_j=\dfrac{(\nu+\delta)(1+\nu)((\nu-\varepsilon+1)(\nu+\gamma+\delta)+\alpha\,\beta)}{(2\nu+\gamma+\delta)(2\nu+\gamma+\delta+1)}\end{cases}$$

$$\widetilde{K}_j c_{j-1}+\left(\widetilde{L}_j+h\right)c_j+\widetilde{M}_j c_{j+1}=0$$

Convergence des séries d'Erdélyi

Je vais essayer maintenant de brosser rapidement les critères de la convergence de ces séries de fonctions hypergéométriques, selon ce que je peux en lire dans l'article d'Erdélyi : « CERTAIN EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF THE HEUN EQUATION » et ce que je peux en tester numériquement avec Mathematica.

Développement de type I : $\begin{cases} \lambda = \alpha & \mu = \beta - \varepsilon \\ \lambda = \beta & \mu = \alpha - \varepsilon \end{cases}$

Les développements avec les fonctions hypergéométrique $P_j^1(z), P_j^2(z), P_j^3(z), P_j^4(z), P_j^5(z)$*, convergent tous à deux conditions :* ***Première condition*** *: q est la racine de l'équation transcendantale de la fraction continue :*

$$\frac{L_0}{M_0 -}\left|\frac{K_1/M_1}{L_1/M_1 -}\right|\frac{K_2/M_2}{L_2/M_2 -}\ldots = 0$$

on peut aussi dire que q est la racine de l'équation issue de l'annulation d'un determinant infini suivant :

$$M_j c_{j+1} + (L_j - q)c_j + K_j c_{j-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} L_0 & M_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ K_1 & L_1 & M_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & K_{j-1} & L_{j-1} & M_{j-1} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & K_j & L_j & M_j & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & K_{j+1} & L_{j+1} & M_{j+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [c_0, \ldots, c_{j-1}, c_j, c_{j+1}, \ldots]^t \end{cases} \quad (\mathbf{M} - q\mathbf{I}).\mathbf{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow q \quad tel\ que \quad \det(\mathbf{M} - q\mathbf{I}) = 0$$

Deuxième condition *: l'argument z dans le plan complexe est à l'intérieur de l'ellipse donc les foyers sont z=0 et z=1 et qui passe par le point z=a. Cette dernière ellipse a pour équation :* $\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}}$*. La condition pour l'argument z s'écrit finalement* $\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}} \geq \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}}$

<u>Le développement avec $P_j^6(z)$ n'est jamais convergent quelque soit la valeur de q partout dans le plan complexe</u>

<u>Le développement avec $P_j^5(z)$ est convergent</u> quelque soit la valeur de q pour les valeurs de z en dehors de l'ellipse, soit $\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}} < \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}}$*. Typiquement pour z=x>a sur l'axe des réels, le développement* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\, P_j^5(z)$ *est convergent.*

Développement de type II : $\begin{cases} \lambda = \gamma + \delta - 1 & \mu = 0 \\ \lambda = \gamma & \mu = \delta - 1 \\ \lambda = \delta & \mu = \gamma - 1 \\ \lambda = 1 & \mu = \gamma + \delta - 2 \end{cases}$

Pour $\lambda = \gamma \quad \mu = \delta - 1$*, les développements* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^1(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^4(z)$ *sont convergents sur z€[0,1] lorsque q est la racine de l'équation transcendantale précédente.*

Pour $\lambda = \delta \quad \mu = \gamma - 1$*, les développements* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^2(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^3(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^6(z)$ *sont convergents sur z€[0,1] lorsque q est la racine de l'équation transcendantale précédente. La convergence pour le développement* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^6(z)$ *a lieu car la fonction* $z^\mu P_j^6(z)$ *est un polynôme de degré j en z.*

Pour $\lambda = 1 \quad \mu = \gamma + \delta - 2$*, les développements* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^2(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^4(z)$ *sont convergents sur z€[0,1] lorsque q est la racine de l'équation transcendantale précédente.*

Pour $\lambda = \delta + \gamma - 1 \quad \mu = 0$*, les développements* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^1(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^3(z),\ \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^6(z)$ *sont convergents sur z€[0,1] lorsque q est la racine de l'équation transcendantale précédente. La convergence pour le développement* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^6(z)$ *a lieu car la fonction* $z^\mu P_j^6(z)$ *est un polynôme de degré j en z.*

En théorie tous ces cas de convergence ont lieu à l'intérieur de l'ellipse $\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}} \geq \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{a}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a}}}$*, mais numériquement je ne suis pas parvenu à le vérifier, aussi je laisse l'intervalle z€[0,1] pour plus de sûreté. En dehors de ces cas de figure il n'y a pas de convergence en dehors de l'ellipse pour aucune des fonctions* $P_j^1(z), P_j^2(z), P_j^3(z), P_j^4(z), P_j^5(z), P_j^6(z)$ *que la valeur q soit contrainte à une racine de l'équation transcendantale ou non.*

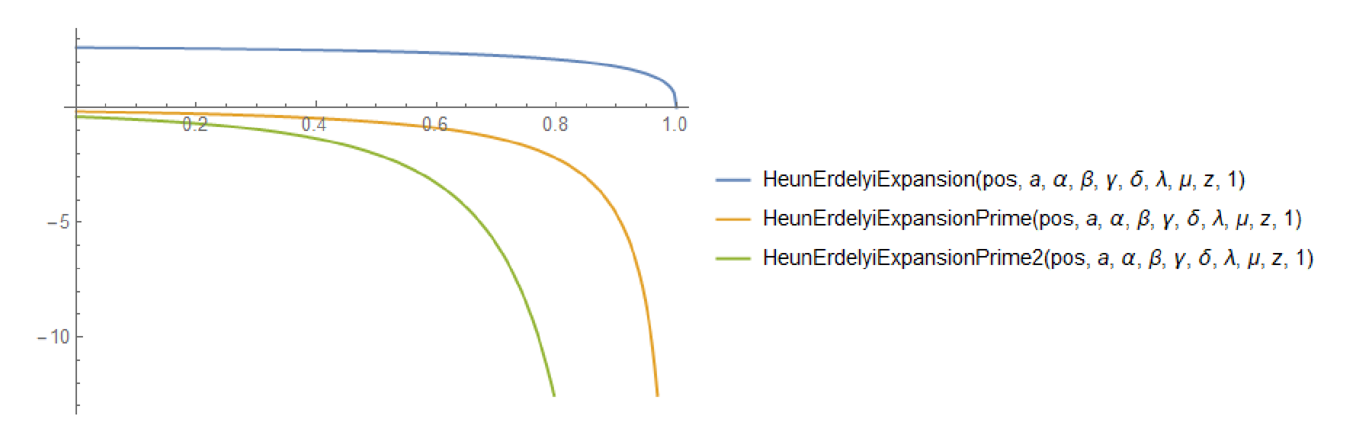
Quelques graphes de développements hypergéométriques, cas de convergence

Commentaire : lorsque la valeur propre q est définie comme l'une des racines de l'équation transcendantale, soit par annulation du déterminant, ou par détermination des valeurs propres d'un système linéaire, soit par formation des fractions continues associées et résolution de l'équation transcendantale par l'algorithme de Bouwkamp par exemple, alors les coefficients du développement sont déterminés par les vecteurs propres de la matrice associée. Dans ce cas la normalisation c_0=1 n'est pas forcément respectée mais la solution approchée obtenue l'est à une constante multiplicative près.

Dans la mesure du possible j'ai donc vérifié de manière empirique la convergence des développements proposés par A.Erdélyi, dans l'article original de 1944 « CERTAIN EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF THE HEUN EQUATION ». Les cas de convergence y sont explicités en pages 66 à 68.

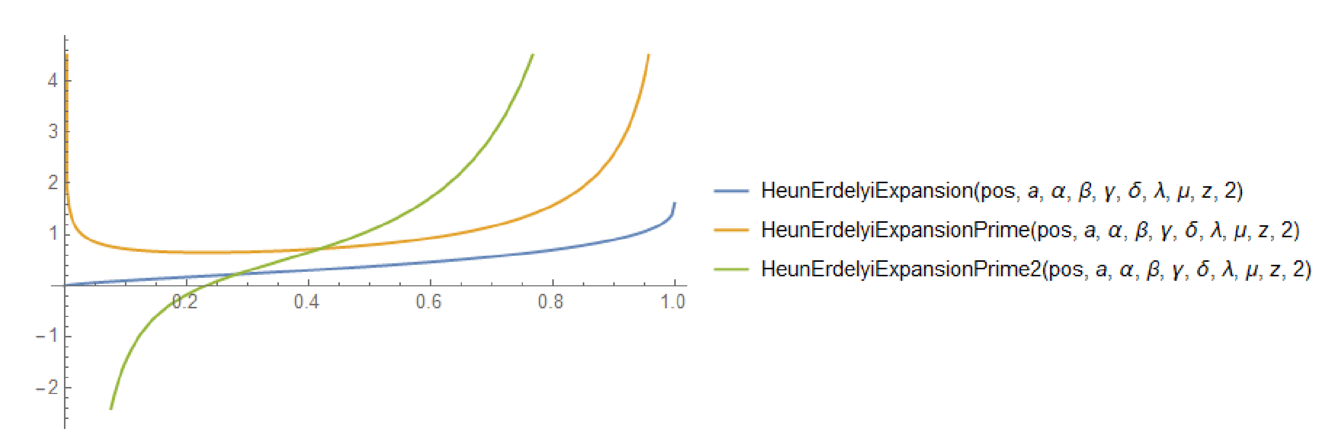
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^1(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda=\alpha \qquad \mu=\beta-\varepsilon$

Paramètres : a=1.25 α = 1/3 β= 1/3 γ= 1/3 δ = 2/3 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
*q=-0.0250046 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



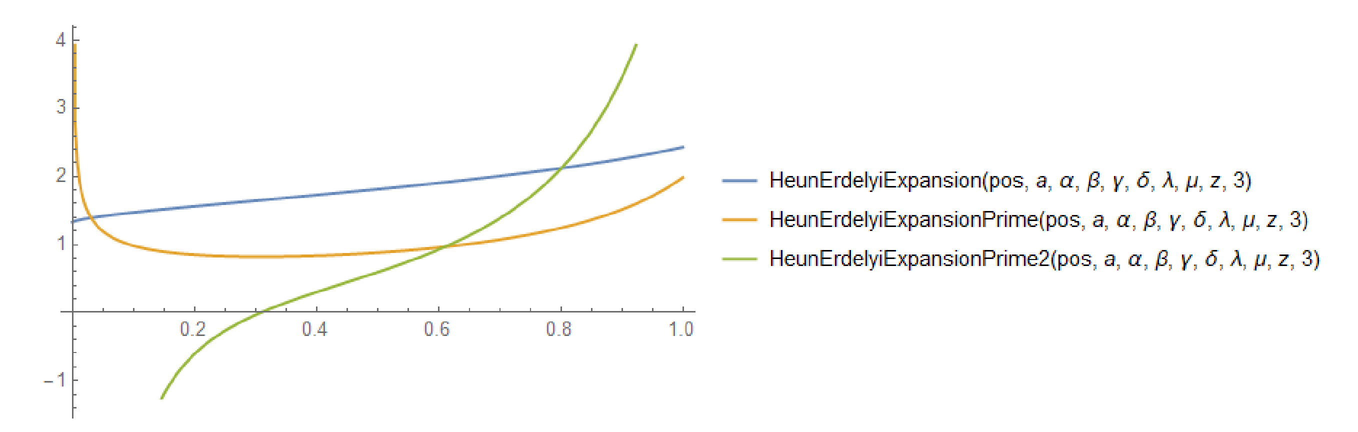
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^2(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda=\alpha \qquad \mu=\beta-\varepsilon$

Paramètres : a=1.25 α = 1/3 β= 1/3 γ= 1/3 δ = 2/3 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
*q=-0.0250046 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



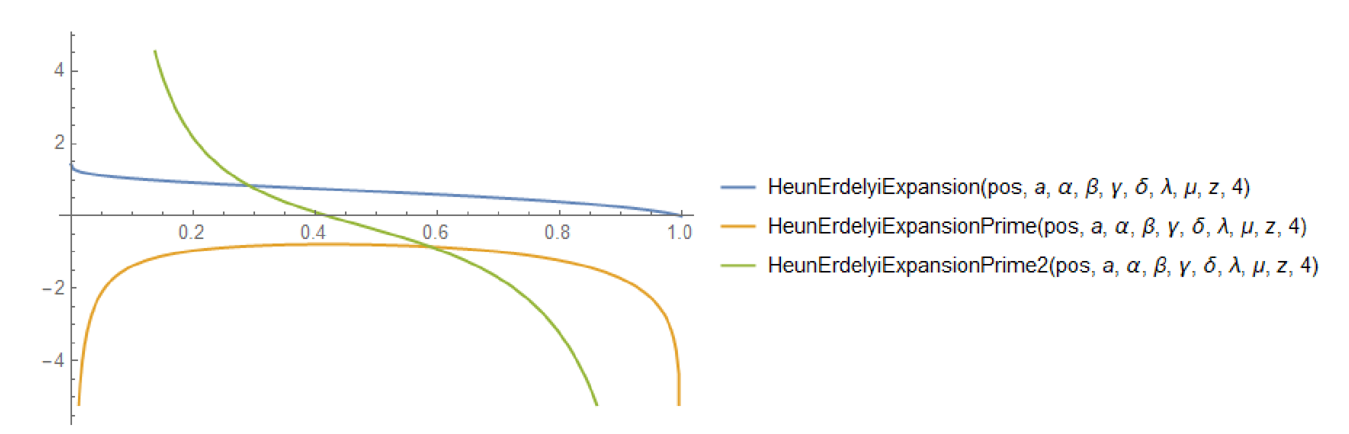
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, P_j^3(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \alpha \qquad \mu = \beta - \varepsilon$

Paramètres : a=1.25 α = 1/3 β= 1/3 γ= 1/3 δ = 2/3 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
*q=-0.0250046 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



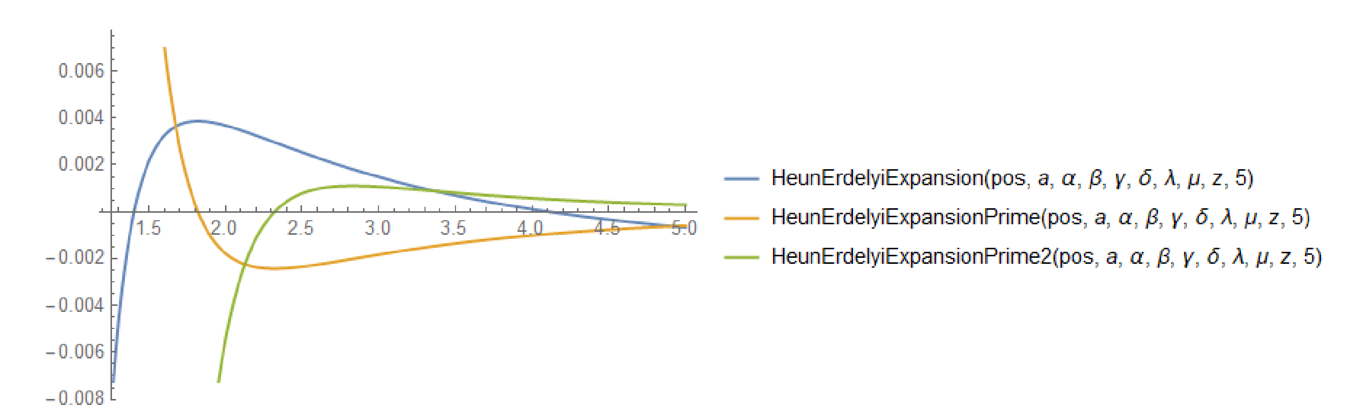
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, P_j^4(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \alpha \qquad \mu = \beta - \varepsilon$

Paramètres : a=1.25 α = 2/7 β= 7/13 γ= 2/3 δ = 1/5 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
*q=0.0472702 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



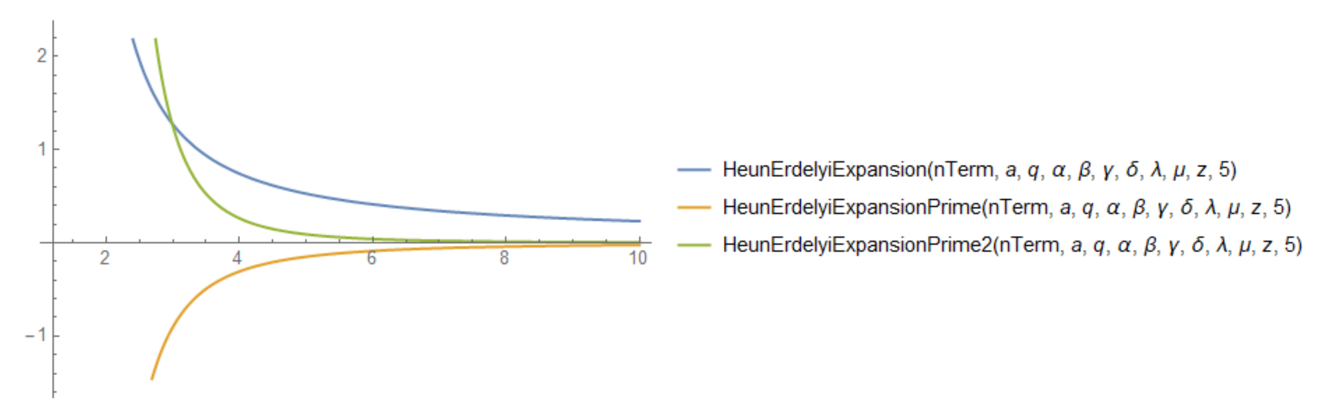
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, P_j^5(z)$ *sur z€[a,+∞] avec* $\lambda = \alpha \qquad \mu = \beta - \varepsilon$

Paramètres : a=1.25 α = 2/7 β= 7/13 γ= 2/3 δ = 1/5 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
*q=-3.21918 est la troisième valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



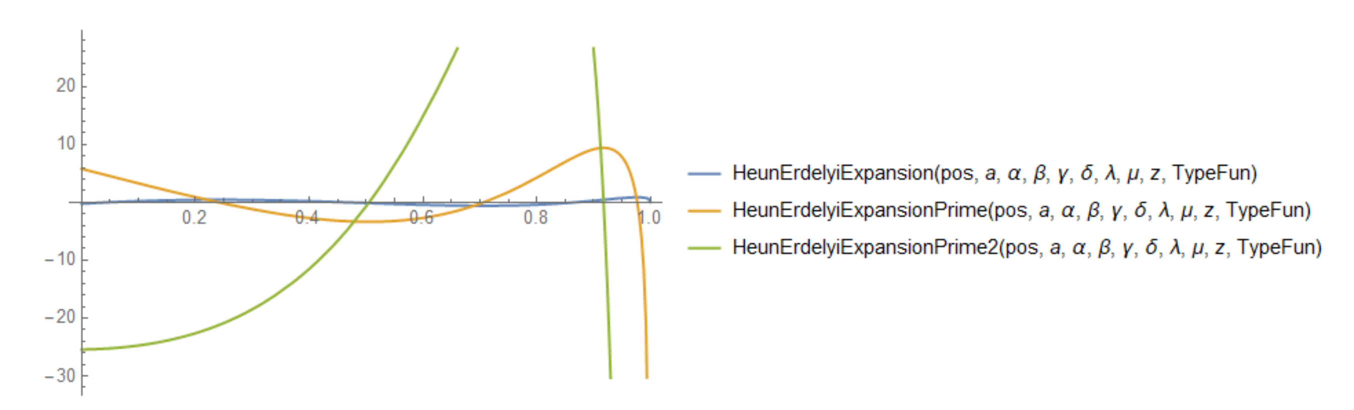
<u>Convergence de la série</u> $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^5(z)$ *<u>sur z€[a,+∞] avec</u>* $\lambda = \alpha \qquad \mu = \beta - \varepsilon$

Paramètres : a=1.2 α = 2/3 β= 3/7 γ= 1/3 δ = 2/7 ε =α+ β+ 1 - γ - δ λ = α μ = β- ε
<u>quelque soit la valeur de q</u>, ici q=3.23, avec 40 termes pour le développement, résolution directe de la récurrence donc c_0*=1 :*



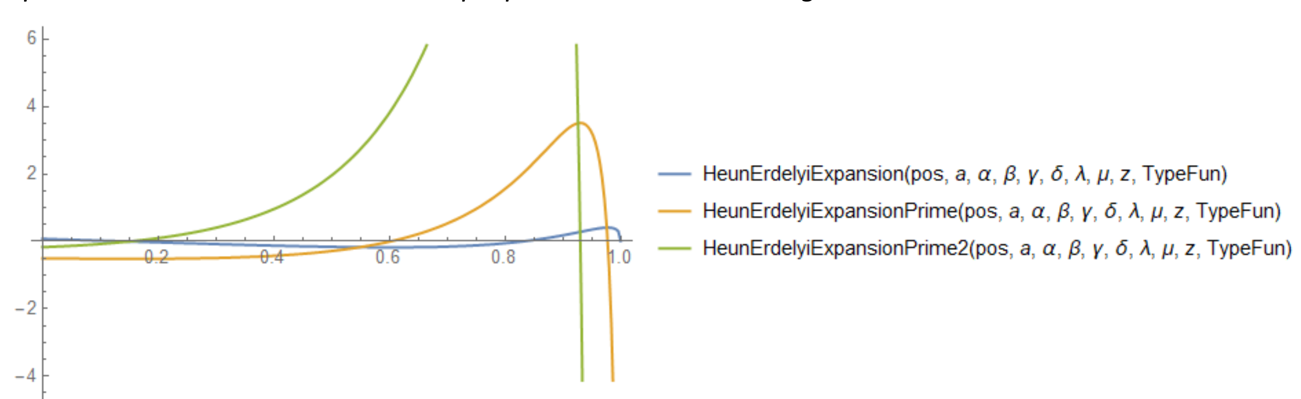
<u>Convergence de la série</u> $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^1(z)$ *<u>sur z€[0,1] avec</u>* $\lambda = \gamma \qquad \mu = \delta - 1$

Paramètres : a=2 α = 7/8 β= 3/4 γ= 3/11 δ = 2/7 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =γ μ=δ-1
*q=-15.7153 est la quatrième valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



<u>Convergence de la série</u> $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^4(z)$ *<u>sur z€[0,1] avec</u>* $\lambda = \gamma \qquad \mu = \delta - 1$

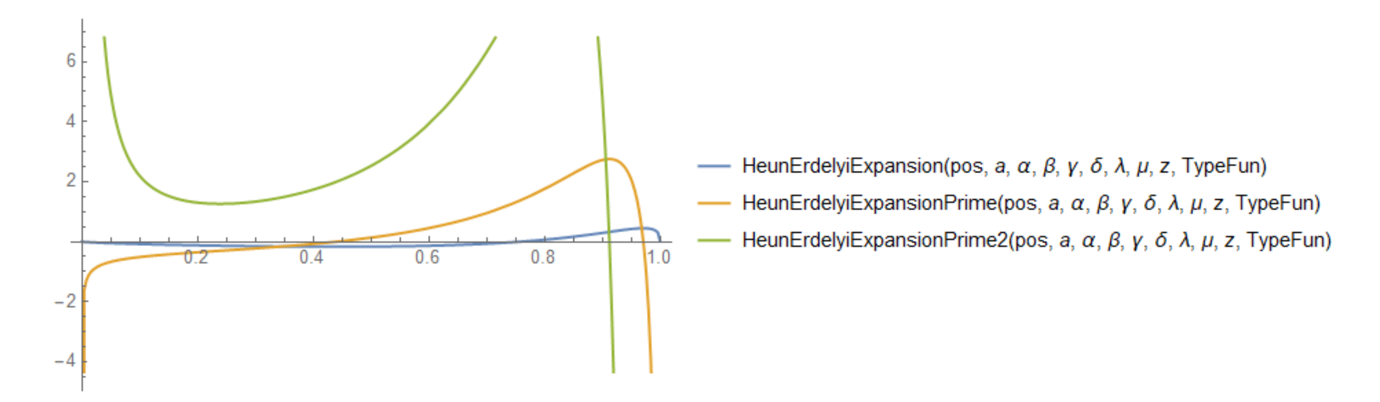
Paramètres : a=1.2 α = 7/8 β= 3/4 γ= 1/3 δ = 2/3 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =γ μ=δ-1
*q=-2.70668 est la troisième valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^2(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = 1 \qquad \mu = \gamma + \delta - 2$

Paramètres : a=1.2   α = 7/8   β= 3/4   γ= 1/3   δ = 2/3 ε =α+ β+ 1-γ-δ   λ =γ   μ=δ-1

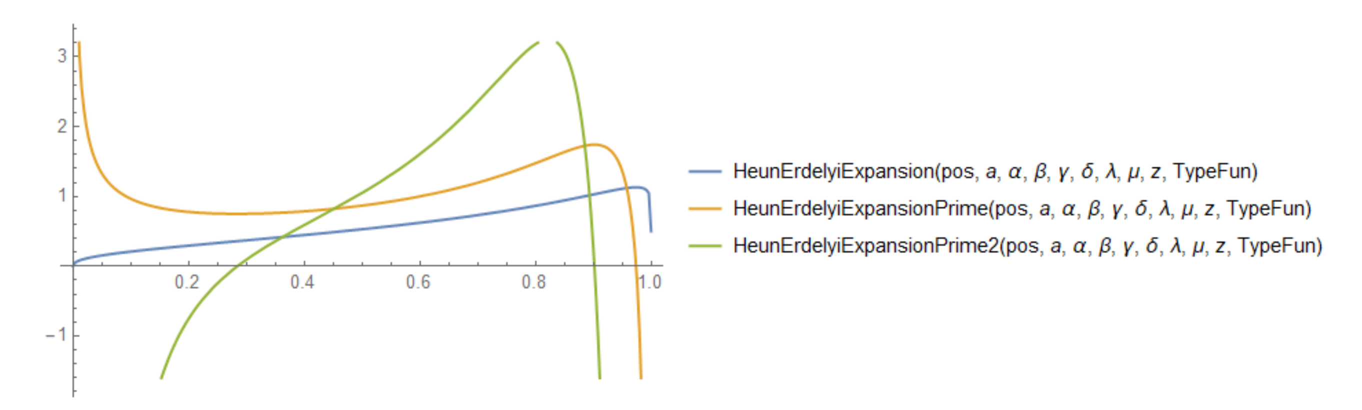
q=-1.92554 est la deuxième valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^4(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = 1 \qquad \mu = \gamma + \delta - 2$

Paramètres : a=1.2   α = 7/8   β= 3/4   γ= 3/5   δ = 12/13 ε =α+ β+ 1-γ-δ   λ =γ   μ=δ-1

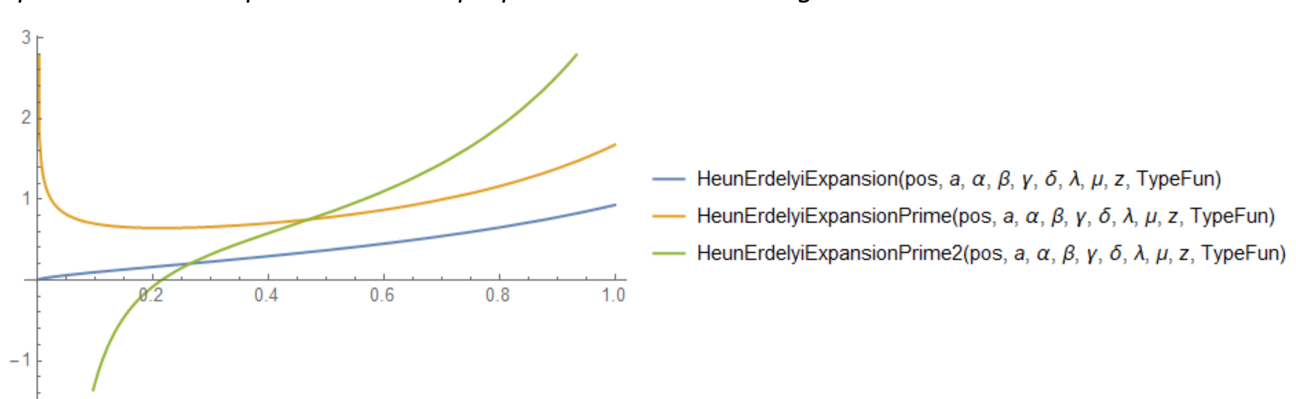
q=0.0379612 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ P_j^2(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \delta \qquad \mu = \gamma - 1$

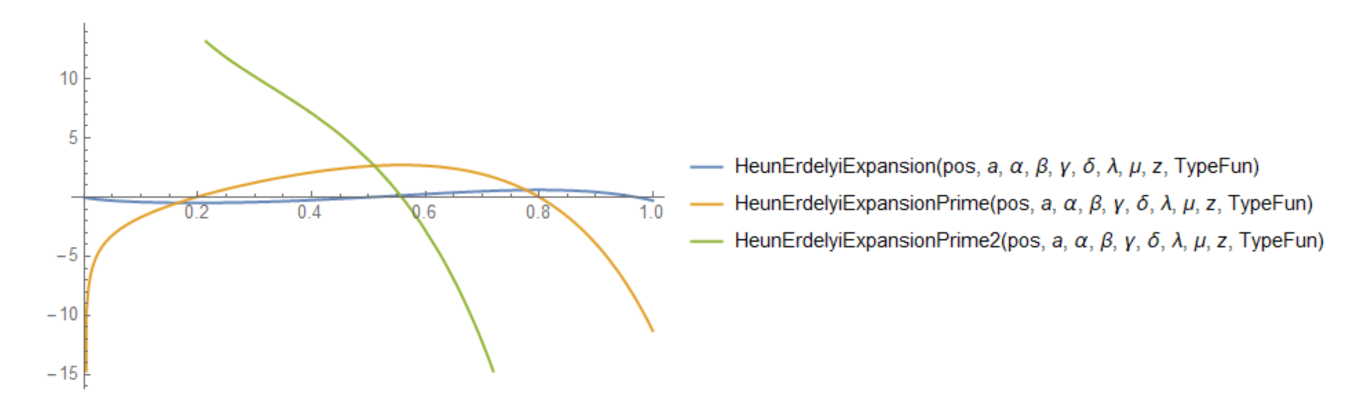
Paramètres : a=2   α = 7/8   β= 3/4   γ= 1/3   δ = 2/9 ε =α+ β+ 1-γ-δ   λ =δ   μ=γ-1

q=0.255647 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



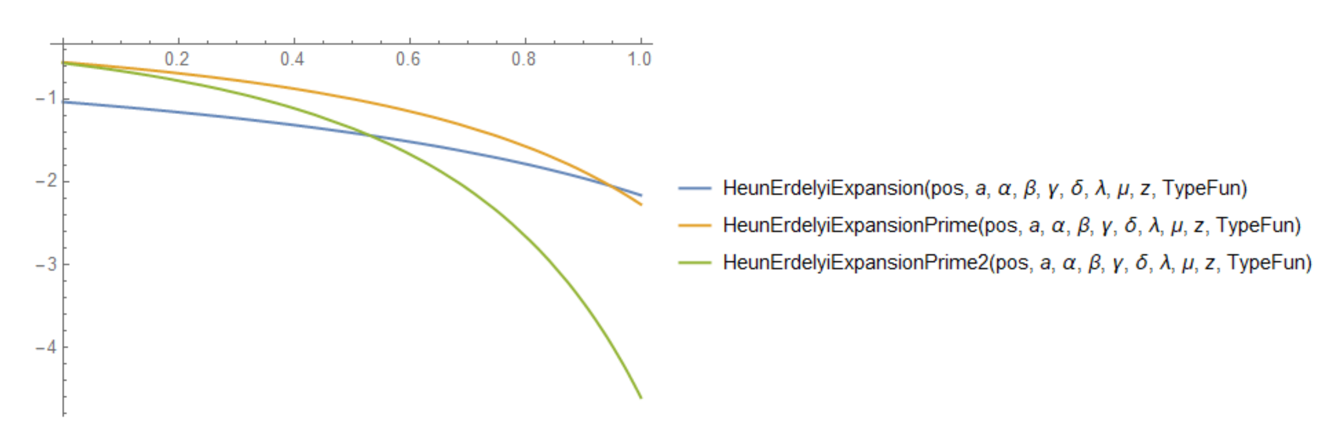
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^4(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \delta \qquad \mu = \gamma - 1$

Paramètres : a=2 α = 7/8 β= 3/4 γ= 1/3 δ = 2/9 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =δ μ=γ-1
q=-8.15284 est la troisième valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



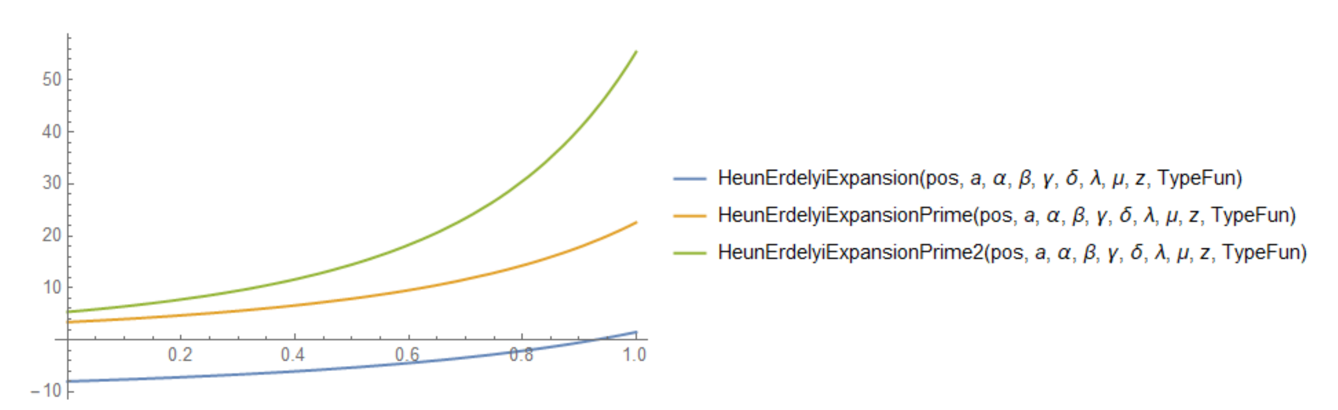
Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^1(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \gamma + \delta - 1 \qquad \mu = 0$

Paramètres : a=2 α = 7/8 β= 3/4 γ= 7/13 δ = 2/27 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =γ+δ-1 μ=0
q=0.578384 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; P_j^3(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \gamma + \delta - 1 \qquad \mu = 0$

Paramètres : a=2 α = 7/8 β= 3/4 γ= 7/13 δ = 2/27 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =γ+δ-1 μ=0
q=-0.4616 est la deuxième valeur propre de la matrice tridiagonale ***M*** *:*



Convergence de la série $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\, P_j^6(z)$ *sur z€[0,1] avec* $\lambda = \gamma + \delta - 1 \qquad \mu = 0$

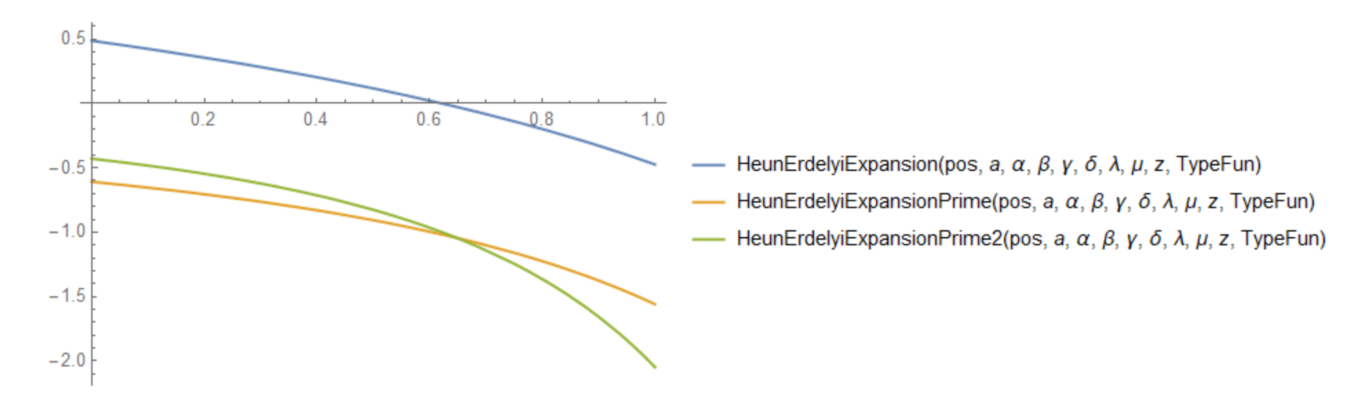
Dans ce cas la fonction hypergéométrique dans la définition de P_6 est un polynôme de degré maximal j en 1/z :

$$P_j^6(z) = \frac{\Gamma(\lambda - \mu + 2j)}{\Gamma(1 - \mu + j)\Gamma(\gamma - \mu + j)} z^{-\mu + j}\, {}_2F_1\left(\mu - j, 1 - \gamma + \mu - j; 1 - \lambda + \mu - 2j; \frac{1}{z}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda = \gamma + \delta - 1 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad {}_2F_1\left(-j, 1 - \gamma - j; 2 - \gamma - \delta - 2j; \frac{1}{z}\right) \quad \textit{Polynôme de degré} \quad j$$

Donc la fonction $z^{\mu} P_j^6(z) = \frac{\Gamma(\gamma + \delta - 1 + 2j)}{\Gamma(1 + j)\Gamma(\gamma + j)} z^j\, {}_2F_1\left(-j, 1 - \gamma - j; 2 - \gamma - \delta - 2j; \frac{1}{z}\right)$ *Polynôme de degré* j *est elle-même un polynôme de degré maximal j. C'est l'une des conditions de convergence de la série* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\, P_j^6(z)$ *avec celle que a soit racine de l'équation transcendantale.*

Paramètres : a=2   α = 1/3 β= 1/3 γ= 1/3   δ = 2/7 ε =α+β+1-γ-δ   λ = γ+δ-1   μ = 0
*q=-0.829572 est la deuxième valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



<u>Convergence de la série</u> $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, P_j^6(z)$ *<u>sur z€[0,1] avec</u>* $\lambda = \delta \qquad \mu = \gamma - 1$

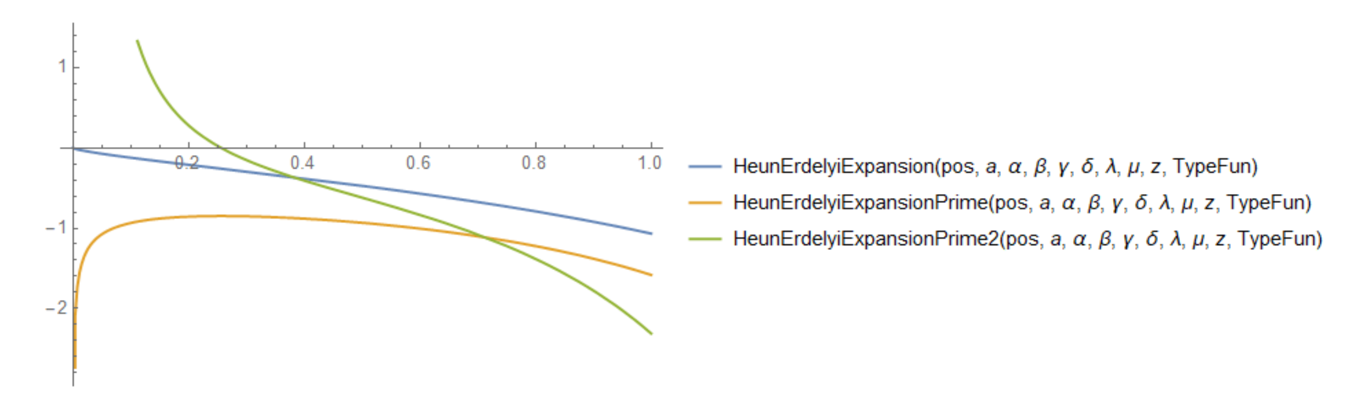
Dans ce cas la fonction hypergéométrique dans la définition de P_6 est un polynôme de degré maximal j en 1/z :

$$P_j^6(z) = \frac{\Gamma(\lambda - \mu + 2j)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)} z^{-\mu+j} \, {}_2F_1\left(\mu - j, 1-\gamma+\mu-j; 1-\lambda+\mu-2j; \frac{1}{z}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda = \delta \\ \mu = \gamma - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad {}_2F_1\left(\gamma - 1 - j, -j; \gamma - \delta - 2j; \frac{1}{z}\right) \quad \textit{Polynôme de degré} \quad j$$

Donc la fonction $z^{\mu} P_j^6(z) = \frac{\Gamma(\delta + 1 - \gamma + 2j)}{\Gamma(2-\gamma+j)\Gamma(1+j)} z^j \, {}_2F_1\left(\gamma - 1 - j, -j; \gamma - \delta - 2j; \frac{1}{z}\right) \quad \textit{Polynôme de degré} \quad j$ *est elle-même un polynôme de degré maximal j. C'est l'une des conditions de convergence de la série* $\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, P_j^6(z)$ *avec celle que a soit racine de l'équation transcendantale.*

Paramètres : a=2 α = 1/3 β= 7/9 γ= 3/11 δ = 2/7 ε =α+ β+ 1-γ-δ λ =δ μ=γ-1
*q=-0.164481 est la première valeur propre de la matrice tridiagonale **M** :*



Remarque : Il est clair que les développements d'Erdelyi sont également possibles avec toutes les formes de Kummer, puisque chacune de ces formes sont des combinaisons linéaires des deux premières fonctions d'Erdélyi. Et que moyennant un bon choix de constante multiplicative cette combinaison linéaire sera indépendante de l'indice j. Dans ce cas on peut légitimement se poser la question d'un développement possible avec une fonction hyper-géométrique s'annulant en 0 et en 1, mais hélas les formes de Kummer ne présente pas de telles fonctions. Il suffit de regarder les formules (15.10.12) et (15.10.14) données dans « NIST Handbook of Mathematical Functions », qui sont les seuls forment régulières en z=0 et z=1. Les produits de la forme $z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}$ dans w2(z) ou ou w4(z) correspondent à des formes équivalentes de ces fonctions qui ne s'annulent chacune qu'en un seul point z=0 ou z=1.

__Quelques relations fonctionnelles concernant les fonctions hypergéométriques__

Prenons la première des fonctions de base P_1 utilisée par Erdélyi toujours à une constante multiplicative près :

$$P_j^1(z)={}_2F_1(\lambda+j,\mu-j;\gamma;z)\Rightarrow\begin{cases}P_{j+1}^1(z)={}_2F_1(\lambda+j+1,\mu-j-1;\gamma;z)\\P_{j-1}^1(z)={}_2F_1(\lambda+j-1,\mu-j+1;\gamma;z)\end{cases}$$

On peut formaliser le problème en établissant deux relations aux « plus proches voisins » de la forme :

$$\begin{cases}z(z-1)\dfrac{d}{dz}\left({}_2F_1(a,b;c;z)\right)=A(a,b,c)\ {}_2F_1(a-1,b+1;c;z)+B(a,b,c)\ {}_2F_1(a+1,b-1;c;z)+C(a,b,c)\ {}_2F_1(a,b;c;z)\\z\ {}_2F_1(a,b;c;z)=D(a,b,c)\ {}_2F_1(a-1,b+1;c;z)+E(a,b,c)\ {}_2F_1(a+1,b-1;c;z)+F(a,b,c)\ {}_2F_1(a,b;c;z)\end{cases}$$

De plus :

$$z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=(a-c)\ {}_2F_1(a-1,b;c;z)+(c-a-b\,z)\ {}_2F_1(a,b;c;z)$$

$$(b-a){}_2F_1(a,b;c;z)+a{}_2F_1(a+1,b;c;z)-b{}_2F_1(a,b+1;c;z)=0$$

$$\Rightarrow(b-a+1){}_2F_1(a-1,b;c;z)+(a-1){}_2F_1(a,b;c;z)-b{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)=0$$

$${}_2F_1(a-1,b;c;z)=\frac{b{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)-(a-1){}_2F_1(a,b;c;z)}{b-a+1}$$

$$z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{(a-c)b}{b-a+1}\ {}_2F_1(a-1,b+1;c;z)+b\left(\frac{c-a}{b-a+1}-z\right)\ {}_2F_1(a,b;c;z)$$

En tenant compte de la symétrie a<->b des fonctions hyper-géométriques :

$$z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{(a-c)b}{b-a+1}\ {}_2F_1(a-1,b+1;c;z)+b\left(\frac{c-a}{b-a+1}-z\right)\ {}_2F_1(a,b;c;z)$$

De même :

$$\Leftrightarrow z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(b,a;c;z)=\frac{(a-c)b}{b-a+1}\ {}_2F_1(b+1,a-1;c;z)+b\left(\frac{c-a}{b-a+1}-z\right)\ {}_2F_1(b,a;c;z)$$

$$a\leftrightarrow b\Rightarrow z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{(b-c)a}{a-b+1}\ {}_2F_1(a+1,b-1;c;z)+a\left(\frac{c-b}{a-b+1}-z\right)\ {}_2F_1(a,b;c;z)$$

D'où :

$$\frac{z(z-1)}{a\,b}(a-b)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{a-c}{b-a+1}\;{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)-\frac{b-c}{a-b+1}\;{}_2F_1(a+1,b-1;c;z)+\left(\frac{c-a}{b-a+1}-\frac{c-b}{a-b+1}\right){}_2F_1(a,b;c;z)$$

$$\Leftrightarrow\frac{z(z-1)}{a\,b}(a-b)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{a-c}{b-a+1}\;{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)-\frac{b-c}{a-b+1}\;{}_2F_1(a+1,b-1;c;z)+\frac{(a-b)}{(b-a+1)(a-b+1)}(a+b+1-2c)\;{}_2F_1(a,b;c;z)$$

Soit finalement la première relation :

$$z(z-1)\frac{d}{dz}{}_2F_1(a,b;c;z)=a\,b\left(\frac{2c-a-b-1}{(b-a+1)(a-b+1)}\;{}_2F_1(a,b;c;z)+\frac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}\;{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)+\frac{b-c}{(b-a)(a-b+1)}\;{}_2F_1(a+1,b-1;c;z)\right)$$

La seconde relation s'établit à l'aide de l'expression suivante :

$$z\,{}_2F_1(a+1,b;c;z)={}_2F_1(a+1,b;c;z)+\frac{c-a-b}{a}\;{}_2F_1(a,b;c;z)-\frac{c-b}{a}\;{}_2F_1(a,b-1;c;z)$$

$$\Rightarrow z\,{}_2F_1(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)+\frac{c-a-b+1}{a-1}\;{}_2F_1(a-1,b;c;z)-\frac{c-b}{a}\;{}_2F_1(a-1,b-1;c;z)$$

$$Or\quad (b-a+1)\,{}_2F_1(a-1,b;c;z)+(a-1)\,{}_2F_1(a,b;c;z)-b\,{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}{}_2F_1(a-1,b;c;z)=\dfrac{b}{b-a+1}{}_2F_1(a-1,b+1;c;z)-\dfrac{a-1}{b-a+1}{}_2F_1(a,b;c;z)\\[2ex]{}_2F_1(a,b-1;c;z)=\dfrac{a}{a-b+1}{}_2F_1(a+1,b-1;c;z)-\dfrac{b-1}{a-b+1}{}_2F_1(a,b;c;z)\end{cases}$$

$$De\ plus\quad {}_2F_1(a-1,b-1;c;z)=\frac{b-1}{b-a}{}_2F_1(a-1,b;c;z)-\frac{a-1}{b-a}{}_2F_1(a,b-1;c;z)$$

$$D'où\quad z\,{}_2F_1(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)+\left(\frac{c-a-b+1}{a-1}-\frac{(c-b)(b-1)}{(a-1)(b-a)}\right){}_2F_1(a-1,b;c;z)+\frac{c-b}{b-a}\;{}_2F_1(a,b-1;c;z)$$

$$\Rightarrow z\,{}_2F_1(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)-\frac{c-a}{b-a}\;{}_2F_1(a-1,b;c;z)+\frac{c-b}{b-a}\;{}_2F_1(a,b-1;c;z)$$

$$\Leftrightarrow z\,{}_2F_1(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)+\frac{c-a}{a-b}\;{}_2F_1(a-1,b;c;z)+\frac{c-b}{b-a}\;{}_2F_1(a,b-1;c;z)$$

Ce qui donne la deuxième relation recherchée et établie ainsi ce que l'on souhaite :

$$\begin{cases}P_1(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)\\[1ex] z(z-1)\dfrac{dP_1(a,b;c;z)}{dz}=a\,b\left(\dfrac{2c-a-b-1}{(b-a+1)(a-b+1)}P_1(a,b;c;z)+\dfrac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}P_1(a-1,b+1;c;z)+\dfrac{b-c}{(b-a)(a-b+1)}P_1(a+1,b-1;c;z)\right)\\[2ex] z\,P_1(a,b;c;z)=\dfrac{2\,a\,b-c\,(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_1(a,b;c;z)+\dfrac{b\,(c-a)}{(b-a+1)(a-b)}P_1(a-1,b+1;c;z)+\dfrac{a\,(c-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_1(a+1,b-1;c;z)\end{cases}$$

La deuxième fonction de base P_2 est obtenue par la transformation de Kummer suivante :

$$\text{Transformation de Kummer}\quad \begin{cases} {}_2F_1(a,b\,;c\,;z)\to z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z) \\ a-c+1\to 1-\gamma+\lambda+j \\ b-c+1\to 1-\gamma+\mu-j \end{cases} \Rightarrow P_j^2(z)=(-1)^j\frac{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(\gamma-\mu+j)}z^{1-\gamma}\,{}_2F_1(1-\gamma+\lambda+j,1-\gamma+\mu-j\,;2-\gamma;z)$$

Prenons alors la première et la deuxième relation en l'appliquant à la fonction ${}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)$, il vient :

$$\begin{cases} z(z-1)\dfrac{d}{dz}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)=(a-c+1)(b-c+1)\begin{pmatrix} \dfrac{a-1}{(a-b)(b-a+1)}\,{}_2F_1(a-c,b-c+2\,;2-c;z)- \\ -\dfrac{b-1}{(a-b)(a-b+1)}\,{}_2F_1(a-c+2,b-c\,;2-c;z)- \\ -\dfrac{a+b-1}{(b-a+1)(a-b+1)}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z) \end{pmatrix} \\ z\,z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)=\begin{cases} \dfrac{2ab-c(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)+ \\ +\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(b-a)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+2,b-c\,;2-c\,;z)- \\ -\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(b-a)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c,b-c+2\,;2-c\,;z) \end{cases} \end{cases}$$

De plus $$z(z-1)\frac{d}{dz}\left\{z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)\right\}=\begin{cases} (1-c)\,z\,z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)- \\ -(1-c)\,z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z) \\ +z^{1-c}z(z-1)\dfrac{d}{dz}\left\{{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)\right\} \end{cases}$$

Il vient finalement :

$$z(z-1)\frac{d}{dz}\left\{z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)\right\}=\begin{cases} \left((1-c)\dfrac{2ab-c(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}-\dfrac{(a+b-1)(a-c+1)(b-c+1)}{(b-a+1)(a-b+1)}-(1-c)\right)z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)+ \\ +\left((1-c)\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(b-a)}-\dfrac{(b-1)(a-c+1)(b-c+1)}{(a-b)(a-b+1)}\right)z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+2,b-c\,;2-c\,;z)+ \\ +\left(\dfrac{(a-1)(a-c+1)(b-c+1)}{(a-b)(b-a+1)}-(1-c)\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(b-a)}\right)z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c,b-c+2\,;2-c;z) \end{cases}$$

$$=\frac{ab(2c-(a+b+1))}{(a-b+1)(b-a+1)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)-\frac{b(1-b)(a-c+1)}{(a-b+1)(b-a)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+2,b-c\,;2-c\,;z)+\frac{a(1-a)(b-c+1)}{(b-a+1)(b-a)}z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c,b-c+2\,;2-c;z)$$

Ce qui donne donc les deux relations pour la fonction de base : $P_2(a,b;c;z)=z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$ *:*

$$\begin{cases} z(z-1)\dfrac{dP_2(a,b;c;z)}{dz}=\dfrac{a\,b\,(2c-(a+b+1))}{(a-b+1)(b-a+1)}P_2(a,b;c;z)-\dfrac{b(1-b)(a-c+1)}{(a-b+1)(b-a)}P_2(a+1,b-1;c;z)+\dfrac{a(1-a)(b-c+1)}{(b-a+1)(b-a)}P_2(a-1,b+1;c;z) \\ z\,P_2(a,b;c;z)=\dfrac{2\,a\,b-c\,(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_2(a,b;c;z)+\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_2(a+1,b-1;c;z)-\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(b-a)}P_2(a-1,b+1;c;z) \end{cases}$$

La troisième fonction de base P_3 obtenue par une transformation de Kummer s'écrit :

$$\text{Transformation de Kummer}\quad \begin{cases} {}_2F_1(a,b;c;z)\to{}_2F_1(a,b;a+b+1-c;1-z) \\ \lambda+j+\mu-j+1-\gamma=\lambda+\mu+1-\gamma=\alpha+\beta+1-\gamma=\delta \end{cases} \Rightarrow P_j^3(z)=\frac{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)}\,{}_2F_1(\lambda+j,\mu-j;\delta;1-z)$$

Il s'agit donc d'une fonction de la forme : ${}_2F_1(a,b;c;1-z)$*, pour lequel a lieu les deux relations suivantes :*

$$\begin{cases} \zeta(\zeta-1)\dfrac{d}{d\zeta}{}_2F_1(a,b;c;\zeta)=a\,b\left(\dfrac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}\,{}_2F_1(a-1,b+1;c;\zeta)-\dfrac{b-c}{(a-b)(a-b+1)}\,{}_2F_1(a+1,b-1;c;\zeta)-\dfrac{a+b+1-2c}{(b-a+1)(a-b+1)}\,{}_2F_1(a,b;c;\zeta)\right) \\ \zeta\;{}_2F_1(a,b;c;\zeta)=\dfrac{2\,a\,b-c\,(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}\,{}_2F_1(a,b;c;\zeta)+\dfrac{a(c-b)}{(a-b+1)(b-a)}\,{}_2F_1(a+1,b-1;c;\zeta)-\dfrac{b(c-a)}{(b-a+1)(b-a)}\,{}_2F_1(a-1,b+1;c;\zeta) \end{cases}$$

$$\zeta=1-z\quad et\quad P_3(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;1-z)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} z(1-z)\dfrac{dP_3(a,b;c;z)}{dz}=a\,b\left(\dfrac{2c-(a+b+1)}{(b-a+1)(a-b+1)}P_3(a,b;c;z)+\dfrac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}P_3(a-1,b+1;c;z)-\dfrac{b-c}{(a-b)(a-b+1)}P_3(a+1,b-1;c;z)\right) \\ z\,P_3(a,b;c;z)=\dfrac{c\,(a+b-1)-a^2-b^2+1}{(a-b+1)(b-a+1)}P_3(a,b;c;z)-\dfrac{a(c-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_3(a+1,b-1;c;z)+\dfrac{b(c-a)}{(b-a+1)(b-a)}P_3(a-1,b+1;c;z) \end{cases}$$

Pour la fonction de base P_4, par le changement z->1-z, on déduit les relations suivante :

$$P_4(a,b;c;z)=(1-z)^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;1-z)$$

$$\begin{cases} z(z-1)\dfrac{dP_4(a,b;c;z)}{dz}=\dfrac{a\,b\,((a+b+1)-2c)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_4(a,b;c;z)+\dfrac{b(1-b)(a-c+1)}{(a-b+1)(b-a)}P_4(a+1,b-1;c;z)-\dfrac{a(1-a)(b-c+1)}{(b-a+1)(b-a)}P_4(a-1,b+1;c;z) \\ z\,P_4(a,b;c;z)=\dfrac{c\,(a+b-1)+1-a^2-b^2}{(a-b+1)(b-a+1)}P_4(a,b;c;z)-\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_4(a+1,b-1;c;z)+\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(b-a)}P_4(a-1,b+1;c;z) \end{cases}$$

Pour les fonctions P_5 et P_6, il est plus aisé de calculer directement la relation fonctionnelle avec les paramètres données par Erdélyi.

Relations fonctionnelles d'Erdelyi sur les fonctions hyper-géométriques de base

A partir des calculs qui précèdent il s'agit d'établir maintenant la relation fonctionnelle qu'Erdelyi introduit dans son article de 1944, et de former la combinaison linéaire suivante entre les deux expressions $P_j'(z), z\,P_j(z)$: $\varepsilon\, z\,(z-1)\,P_j'(z)+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)\,(\mu-j))\,z\,P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+\Lambda_j\,P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)$.

Fonction P^1_j ***:*** *sachant que :*

$$P_j^1(z)=C_j\;{}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\gamma\,;z)=(-1)^j\frac{\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(1-\mu+j)}\;{}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\gamma\,;z)\Rightarrow\frac{C_j}{C_{j+1}}=-\frac{1-\mu+j}{\lambda+j}\quad\frac{C_j}{C_{j-1}}=-\frac{\lambda+j-1}{j-\mu}$$

et que les relations aux plus proches voisins ont été établies :

$$\begin{cases}P_1(a,b\,;c;z)={}_2F_1(a,b\,;c;z)\\ z\,(z-1)\dfrac{dP_1(a,b\,;c;z)}{dz}=a\,b\left(\dfrac{2c-a-b-1}{(b-a+1)(a-b+1)}P_1(a,b\,;c;z)+\dfrac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}P_1(a-1,b+1\,;c;z)+\dfrac{b-c}{(b-a)(a-b+1)}P_1(a+1,b-1\,;c;z)\right)\\ z\,P_1(a,b\,;c;z)=\dfrac{2\,a\,b-c\,(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_1(a,b\,;c;z)+\dfrac{b\,(c-a)}{(b-a+1)(a-b)}P_1(a-1,b+1\,;c;z)+\dfrac{a\,(c-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_1(a+1,b-1\,;c;z)\end{cases}$$

Il vient :

$$a=\lambda+j\quad b=\mu-j\quad c=\gamma\Rightarrow a-b=\lambda-\mu+2j\quad b-a=\mu-\lambda-2j\quad a+b=\lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon$$

$$z\,(z-1)\frac{dP_j^1(z)}{dz}=\frac{(\lambda+j)\,(\mu-j)(2\gamma-\alpha-\beta+\varepsilon-1)}{(\mu-\lambda-2j+1)(\lambda-\mu+2j+1)}P_j^1(z)+\frac{(\lambda+j)(\lambda+j-\gamma)(\lambda+j-1)}{(\lambda-\mu+2j)(\mu-\lambda-2j+1)}P_{j-1}^1(z)-\frac{(\mu-j)(\mu-j-\gamma)(1+j-\mu)}{(\mu-\lambda-2j)(\lambda-\mu+2j+1)}P_{j+1}^1(z)$$

$$z\,P_j^1(z)=\frac{2\,(\lambda+j)\,(\mu-j)-\gamma\,(\alpha+\beta-\varepsilon-1)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j+1)}P_j^1(z)+\frac{(\gamma-\lambda-j)(\lambda+j-1)}{(\mu-\lambda-2j+1)(\lambda-\mu+2j)}P_{j-1}^1(z)-\frac{(\gamma-\mu+j)(1+j-\mu)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j)}P_{j+1}^1(z)$$

$$\varepsilon\,z\,(z-1)\frac{dP_j^1(z)}{dz}+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)\,(\mu-j))\,z\,P_j^1(z)=K_{j+1}P_{j+1}^1(z)+\Lambda_jP_j^1(z)+M_{j-1}P_{j-1}^1(z)\qquad\varepsilon=\alpha+\beta-\lambda-\mu$$

$$\begin{cases}K_{j+1}=(\gamma-\mu+j)(1+j-\mu)\dfrac{(j-\mu+\alpha+\beta)\,(\mu-j)-\alpha\,\beta}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j)}=\dfrac{(j+\alpha-\mu)\,(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+1-\mu)}{(2j+1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\\ \Lambda_j=\dfrac{(\alpha\,\beta-(\lambda+j)\,(\mu-j))(2\,(\lambda+j)\,(\mu-j)-\gamma\,(\lambda+\mu-1))+(\lambda+j)\,(\mu-j)(\alpha+\beta-\lambda-\mu)(2\gamma-\lambda-\mu-1)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j+1)}\\ =\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\\ M_{j-1}=\dfrac{(\lambda+j-\gamma)(\lambda+j-1)}{(2j+\lambda-\mu)(2j-1+\lambda-\mu)}(\alpha\,\beta-(\lambda+j)\,(\mu-j+\varepsilon))=\dfrac{(j-\alpha+\lambda)\,(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j+\lambda-1)}{(2j-1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\end{cases}$$

Fonction P^2_j : *sachant que :*

$$P_j^2(z)=C_j\,z^{1-\gamma}\,{}_2F_1(1-\gamma+\lambda+j,1-\gamma+\mu-j\,;2-\gamma\,;z)=(-1)^j\,\frac{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(\gamma-\mu+j)}\;{}_2F_1(1-\gamma+\lambda+j,1-\gamma+\mu-j\,;2-\gamma\,;z)\Rightarrow\frac{C_j}{C_{j+1}}=\frac{\mu-\gamma-j}{1-\gamma+\lambda+j}\quad\frac{C_j}{C_{j-1}}=\frac{\lambda-\gamma+j}{1-\gamma+\mu-j}$$

et que les relations aux plus proches voisins ont été établies :

$$P_2(a,b\,;c\,;z)=z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)$$

$$\begin{cases}z\,(z-1)\dfrac{dP_2(a,b\,;c\,;z)}{dz}=\dfrac{a\,b\,(2\,c-(a+b+1))}{(a-b+1)(b-a+1)}P_2(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{a\,(1-a)(b-c+1)}{(b-a+1)(b-a)}P_2(a-1,b+1\,;c\,;z)+\dfrac{b\,(1-b)(a-c+1)}{(a-b+1)(a-b)}P_2(a+1,b-1\,;c\,;z)\\ z\,P_2(a,b\,;c\,;z)=\dfrac{2\,a\,b-c\,(a+b-1)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_2(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(a-b)}P_2(a-1,b+1\,;c\,;z)+\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(b-a)}P_2(a+1,b-1\,;c\,;z)\end{cases}$$

Il vient :

$$a=\lambda+j\quad b=\mu-j\quad c=\gamma\Rightarrow a-b=\lambda-\mu+2j\quad b-a=\mu-\lambda-2j\quad a+b=\lambda+\mu=\alpha+\beta-\varepsilon$$

$$\frac{C_j}{C_{j+1}}=\frac{\mu-\gamma-j}{1-\gamma+\lambda+j}\quad\frac{C_j}{C_{j-1}}=\frac{\lambda-\gamma+j}{1-\gamma+\mu-j}$$

$$z\,(z-1)\frac{dP_j^2(z)}{dz}=\frac{(\lambda+j)(\mu-j)(2\,\gamma-(\lambda+\mu+1))}{(\lambda-\mu+2\,j+1)(\mu-\lambda-2\,j+1)}P_j^2(z)+\frac{(\lambda+j)(1-\lambda-j)(\lambda-\gamma+j)}{(2\,j-1+\lambda-\mu)(2\,j-\mu+\lambda)}P_{j-1}^2(z)+\frac{(\mu-j)(1-\mu+j)(\mu-\gamma-j)}{(\lambda-\mu+2\,j+1)(\lambda-\mu+2\,j)}P_{j+1}^2(z)$$

$$z\,P_j^2(z)=\frac{2\,(\lambda+j)(\mu-j)-\gamma\,(\lambda+\mu-1)}{(\lambda-\mu+2\,j+1)(\mu-\lambda-2\,j+1)}P_j^2(z)+\frac{(\lambda-\gamma+j)(\lambda+j-1)}{(2\,j-1+\lambda-\mu)(\lambda-\mu+2\,j)}P_{j-1}^2(z)+\frac{(1-\mu+j)(j-\mu+\gamma)}{(\lambda-\mu+2\,j+1)(\lambda-\mu+2\,j)}P_{j+1}^2(z)$$

$$\varepsilon\,z\,(z-1)\frac{dP_j^1(z)}{dz}+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j))\,z\,P_j^1(z)=K_{j+1}P_{j+1}^1(z)+\Lambda_jP_j^1(z)+M_{j-1}P_{j-1}^1(z)$$

$$\begin{cases}K_{j+1}=(1-\mu+j)(j-\mu+\gamma)\dfrac{\alpha\,\beta-(\lambda+j+\varepsilon)(\mu-j)}{(\lambda-\mu+2\,j+1)(\lambda-\mu+2\,j)}=\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+1-\mu)}{(2\,j+1+\lambda-\mu)(2\,j+\lambda-\mu)}\\ M_{j-1}=(\lambda-\gamma+j)(j+\lambda-1)\dfrac{\alpha\,\beta-(\mu-j+\varepsilon)(\lambda+j)}{(2\,j-1+\lambda-\mu)(2\,j+\lambda-\mu)}=\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j+\lambda-1)}{(2\,j-1+\lambda-\mu)(2\,j+\lambda-\mu)}\\ \Lambda_j=\dfrac{\varepsilon(\lambda+j)(\mu-j)(2\,\gamma-(\lambda+\mu+1))+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j))(2\,(\lambda+j)(\mu-j)-\gamma\,(\lambda+\mu-1))}{(\mu-\lambda-2\,j+1)(\lambda-\mu+2\,j+1)}\\ =\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2\,j+\lambda-\mu)(2\,j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2\,j+\lambda-\mu)(2\,j+\lambda-\mu-1)}\end{cases}$$

<u>Fonction P^3_j :</u> *Sachant que*

$$P_j^3(z)=C_j\ {}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\delta\,;1-z)=\frac{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)}\ {}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\delta\,;1-z)\Rightarrow\frac{C_j}{C_{j+1}}=\frac{(1-\mu+j)(\gamma-\mu+j)}{(\lambda+j)(1-\gamma+\lambda+j)}\quad\frac{C_j}{C_{j-1}}=\frac{(\lambda+j-1)(j-\gamma+\lambda)}{(j-\mu)(\gamma-\mu+j-1)}$$

et que les relations aux plus proches voisins ont été établies :

$$P_3(a,b\,;c\,;z)={}_2F_1(a,b\,;c\,;1-z)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} z(z-1)\dfrac{dP_3(a,b\,;c;z)}{dz}=-a\,b\left(\dfrac{2c-(a+b+1)}{(b-a+1)(a-b+1)}P_3(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{a-c}{(a-b)(b-a+1)}P_3(a-1,b+1\,;c;z)+\dfrac{b-c}{(b-a)(a-b+1)}P_3(a+1,b-1\,;c\,;z)\right)\\ z\,P_3(a,b\,;c;z)=\dfrac{c\,(a+b-1)-a^2-b^2+1}{(a-b+1)(b-a+1)}P_3(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{b\,(c-a)}{(b-a+1)(b-a)}P_3(a-1,b+1\,;c\,;z)+\dfrac{a\,(c-b)}{(a-b+1)(a-b)}P_3(a+1,b-1\,;c\,;z)\end{cases}$$

Il vient :

$$a=\lambda+j\quad b=\mu-j\quad c=\delta\Rightarrow a-b=\lambda-\mu+2j\quad b-a=\mu-\lambda-2j\quad a+b=\lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon$$

$$\lambda+\mu=\gamma+\delta-1\Rightarrow\delta=\lambda+\mu+1-\gamma$$

$$z(z-1)\frac{dP_j^3(z)}{dz}=(\lambda+j)(\mu-j)\frac{\alpha+\beta-\varepsilon+1-2\delta}{(\mu-\lambda-2j+1)(\lambda-\mu+2j+1)}P_j^3(z)-\frac{(\lambda+j)(\lambda+j-1)(j-\gamma+\lambda)}{(\lambda-\mu+2j)(\lambda-\mu+2j-1)}P_{j-1}^3(z)-\frac{(\mu-j)(1-\mu+j)(\gamma-\mu+j)}{(\lambda-\mu+2j)(\lambda-\mu+2j+1)}P_{j+1}^3(z)$$

$$z\,P_j^3(z)=\frac{(\lambda+\mu+1-\gamma)(\alpha+\beta-\varepsilon-1)-(\lambda+j)^2-(\mu-j)^2+1}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j+1)}P_j^3(z)+\frac{(\lambda+j-1)(j-\gamma+\lambda)}{(\mu-\lambda-2j+1)(\mu-\lambda-2j)}P_{j-1}^3(z)+\frac{(1-\mu+j)(\gamma-\mu+j)}{(\lambda-\mu+2j)(\lambda-\mu+2j+1)}P_{j+1}^3(z)$$

$$\varepsilon\,z(z-1)\frac{dP_j^1(z)}{dz}+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j))z\,P_j^1(z)=K_{j+1}P_{j+1}^1(z)+\Lambda_jP_j^1(z)+M_{j-1}P_{j-1}^1(z)$$

$$\begin{cases} K_{j+1}=(1-\mu+j)(\gamma-\mu+j)\dfrac{\alpha\,\beta-(\lambda+j+\varepsilon)(\mu-j)}{(\lambda-\mu+2j)(\lambda-\mu+2j+1)}=\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+1-\mu)}{(2j+1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\\ M_{j-1}=(\lambda+j-1)(j-\gamma+\lambda)\dfrac{\alpha\,\beta+(\lambda+j)(j-\varepsilon-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j-1+\lambda-\mu)}=\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j+\lambda-1)}{(2j-1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\\ \Lambda_j=\dfrac{\varepsilon(\lambda+j)(\mu-j)(\alpha+\beta-\varepsilon+1-2\delta)+(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j))\left((\lambda+\mu+1-\gamma)(\alpha+\beta-\varepsilon-1)-(\lambda+j)^2-(\mu-j)^2+1\right)}{(\mu-\lambda-2j+1)(\lambda-\mu+2j+1)}\\ =\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\end{cases}$$

Fonction P^4_j ***:*** *sachant que :*

$$P_j^4(z)=(1-z)^{1-\delta}{}_2F_1(\lambda+j+1-\delta,\mu-j+1-\delta\,;2-\delta\,;1-z)\Rightarrow\frac{C_j}{C_{j+1}}=\frac{C_j}{C_{j-1}}=1$$

et que les relations aux plus proches voisins ont été établies :

$$P_4(a,b\,;c\,;z)=(1-z)^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;1-z)$$

$$\begin{cases} z(z-1)\dfrac{dP_4(a,b\,;c\,;z)}{dz}=\dfrac{a\,b\left((a+b+1)-2c\right)}{(a-b+1)(b-a+1)}P_4(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{a(1-a)(b-c+1)}{(b-a+1)(a-b)}P_4(a-1,b+1\,;c\,;z)+\dfrac{b(1-b)(a-c+1)}{(a-b+1)(b-a)}P_4(a+1,b-1\,;c\,;z)\\ z\,P_4(a,b\,;c\,;z)=\dfrac{c(a+b-1)+1-a^2-b^2}{(a-b+1)(b-a+1)}P_4(a,b\,;c\,;z)+\dfrac{(b-c+1)(1-a)}{(b-a+1)(b-a)}P_4(a-1,b+1\,;c\,;z)+\dfrac{(a-c+1)(1-b)}{(a-b+1)(a-b)}P_4(a+1,b-1\,;c\,;z)\end{cases}$$

Il vient :

$$a=\lambda+j\quad b=\mu-j\quad c=\delta\Rightarrow a-b=\lambda-\mu+2j\quad b-a=\mu-\lambda-2j\quad a+b=\lambda+\mu=\gamma+\delta-1=\alpha+\beta-\varepsilon$$

$$\lambda+\mu=\gamma+\delta-1\Rightarrow\delta=\lambda+\mu+1-\gamma\quad\lambda+1-\delta=\gamma-\mu\quad\mu+1-\delta=\gamma-\lambda$$

$$z(z-1)\frac{dP_j^4(z)}{dz}=\frac{(\lambda+j)(\mu-j)(\alpha+\beta-\varepsilon+1-2\delta)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j+1)}P_j^4(z)-\frac{(\lambda+j)(1-\lambda-j)(\mu+1-\delta-j)}{(2j-1+\lambda-\mu)(\lambda-\mu+2j)}P_{j-1}^4(z)+\frac{(j-\mu)(1-\mu+j)(\lambda+1-\delta+j)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\lambda-\mu+2j)}P_{j+1}^4(z)$$

$$z\,P_j^4(z)=\frac{\delta(\alpha+\beta-\varepsilon-1)+1-(\lambda+j)^2-(\mu-j)^2}{(\lambda-\mu+2j+1)(\mu-\lambda-2j+1)}P_j^4(z)+\frac{(\mu+1-\delta-j)(1-\lambda-j)}{(2j-1+\lambda-\mu)(\lambda-\mu+2j)}P_{j-1}^4(z)+\frac{(\lambda+1-\delta+j)(1-\mu+j)}{(\lambda-\mu+2j+1)(\lambda-\mu+2j)}P_{j+1}^4(z)$$

$$\varepsilon\,z(z-1)\frac{dP_j^1(z)}{dz}+\left(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j)\right)z\,P_j^1(z)=K_{j+1}P_{j+1}^1(z)+\Lambda_jP_j^1(z)+M_{j-1}P_{j-1}^1(z)$$

$$\begin{cases} K_{j+1}=(1-\mu+j)(\gamma-\mu+j)\dfrac{\alpha\,\beta-(\lambda+j+\varepsilon)(\mu-j)}{(\lambda-\mu+2j)(\lambda-\mu+2j+1)}=\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+1-\mu)}{(2j+1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\\ M_{j-1}=(1-\lambda-j)(\gamma-\lambda-j)\dfrac{\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j+\varepsilon)}{(2j+\lambda-\mu)(2j-1+\lambda-\mu)}=\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j+\lambda-1)}{(2j-1+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu)}\\ \Lambda_j=\dfrac{\varepsilon(\lambda+j)(\mu-j)(\alpha+\beta-\varepsilon+1-2\delta)+\left(\alpha\,\beta-(\lambda+j)(\mu-j)\right)\left(\delta(\alpha+\beta-\varepsilon-1)+1-(\lambda+j)^2-(\mu-j)^2\right)}{(\mu-\lambda-2j+1)(\lambda-\mu+2j+1)}\\ =\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\end{cases}$$

Passons aux fonctions P_5 et P_6, liées aux transformations de Kummer :

$$\text{Transformation de Kummer}\quad \begin{cases} {}_2F_1(a,b;c;z) \to z^{-a}\,{}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) \\ {}_2F_1(a,b;c;z) \to z^{-b}\,{}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

Soit avec les paramètres donnés par Erdélyi :

$$a = \lambda + j \qquad b = \mu - j \qquad c = \gamma$$

$$\begin{cases} P_5(a,b;c;z) = z^{-a}\,{}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) = z^{-\lambda-j}\,{}_2F_1\left(\lambda+j, 1-\gamma+\lambda+j; 1+\lambda-\mu+2j; \frac{1}{z}\right) \\ P_6(a,b;c;z) = z^{-b}\,{}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right) = z^{-\mu+j}\,{}_2F_1\left(\mu-j, 1-\gamma+\mu-j; 1+\mu-\lambda-2j; \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

Précisément ce sont les fonctions suivantes :

$$P_j^5(z) = \frac{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}{\Gamma(1+\lambda-\mu+2j)} z^{-\lambda-j}\,{}_2F_1\left(\lambda+j, 1-\gamma+\lambda+j; 1+\lambda-\mu+2j; \frac{1}{z}\right)$$

$$P_j^6(z) = \frac{\Gamma(\lambda-\mu+2j)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)} z^{-\mu+j}\,{}_2F_1\left(\mu-j, 1-\gamma+\mu-j; 1-\lambda+\mu-2j; \frac{1}{z}\right)$$

Pour trouver les relations fonctionnelles sur ces fonctions, le plus simple est encore d'utiliser les formules de connexion de Kummer concernant les diverses fonctions indépendantes et solutions de l'équation hyper-géométriques. D'après « NIST Handbook of Mathematical Functions Chapitre 15 Hypergeometric Function », a lieu les combinaisons linéaires suivantes, ou encore formules de connexion :

$$w_1(z) = P_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z)$$

$$w_2(z) = P_2(a,b;c;z) = z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z)$$

$$w_5(z) = e^{ia\pi} P_5(a,b;c;z) = e^{ia\pi} z^{-a}\,{}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right)$$

$$w_6(z) = e^{ib\pi} P_6(a,b;c;z) = e^{ib\pi} z^{-b}\,{}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}\right)$$

$$w_5(z) = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)} w_1(z) + e^{i(c-1)\pi} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} w_2(z)$$

$$w_6(z) = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(1-a)} w_1(z) + e^{i(c-1)\pi} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} w_2(z)$$

Soit avec les paramètres et constantes multiplicatives données par Erdelyi :

$$a=\lambda+j \qquad b=\mu-j \qquad c=\gamma$$

$$w_1(z)={}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\gamma\,;z)=(-1)^j\,\frac{\Gamma(1-\mu+j)}{\Gamma(\lambda+j)}P_j^1(z)$$

$$w_2(z)=z^{1-c}\,{}_2F_1(\lambda+j-\gamma+1,\mu-j-\gamma+1\,;2-\gamma\,;z)=(-1)^j\,\frac{\Gamma(\gamma-\mu+j)}{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^2(z)$$

$$w_5(z)=e^{i(\lambda+j)\pi}z^{-\lambda-j}\,{}_2F_1\left(\lambda+j,\lambda+j-\gamma+1\,;\lambda+2j-\mu+1\,;\frac{1}{z}\right)=e^{i(\lambda+j)\pi}\,\frac{\Gamma(1+\lambda-\mu+2j)}{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^5(z)$$

$$w_6(z)=e^{i(\mu-j)\pi}z^{-\mu+j}\,{}_2F_1\left(\mu-j,\mu-j-\gamma+1\,;\mu-\lambda-2j+1\,;\frac{1}{z}\right)=e^{i(\mu-j)\pi}\,\frac{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)}{\Gamma(\lambda-\mu+2j)}P_j^6(z)$$

$$\Rightarrow P_j^5(z)=e^{-i\lambda\pi}\left(\Gamma(1-\gamma)P_j^1(z)+e^{i(\gamma-1)\pi}\Gamma(\gamma-1)P_j^2(z)\right)$$

$$\Rightarrow e^{i\mu\pi}P_j^6(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\lambda-\mu+2j)\Gamma(\mu-\lambda-2j+1)}{\Gamma(\gamma-\mu+j)\Gamma(\mu-j-\gamma+1)\Gamma(1-\lambda-j)\Gamma(\lambda+j)}P_j^1(z)+e^{i(\gamma-1)\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\lambda-\mu+2j)\Gamma(\mu-\lambda-2j+1)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\mu-j)\Gamma(\gamma-\lambda-j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^2(z)$$

$$Or\;\begin{cases}\Gamma(1-\lambda-j)\Gamma(\lambda+j)=\dfrac{\pi}{Sin(\pi(\lambda+j))}=(-1)^j\,\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,\lambda)}\\[2ex]\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\mu-j)=\dfrac{\pi}{Sin(\pi(\mu-j))}=(-1)^j\,\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,\mu)}\\[2ex]\Gamma(\lambda-\mu+2j)\Gamma(\mu-\lambda-2j+1)=\dfrac{\pi}{Sin(\pi(\lambda-\mu+2j))}=\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,(\lambda-\mu))}\\[2ex]\Gamma(\gamma-\mu+j)\Gamma(\mu-j-\gamma+1)=\dfrac{\pi}{Sin(\pi(\gamma-\mu+j))}=(-1)^j\,\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,(\gamma-\mu))}\\[2ex]\Gamma(\gamma-\lambda-j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)=\dfrac{\pi}{Sin(\pi(\gamma-\lambda-j))}=(-1)^j\,\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,(\gamma-\lambda))}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_j^6(z)=e^{-i\mu\pi}\,\frac{\Gamma(1-\gamma)Sin(\pi\,(\gamma-\mu))Sin(\pi\,\lambda)}{\pi\,Sin(\pi\,(\lambda-\mu))}P_j^1(z)+e^{i(\gamma-\mu-1)\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma-1)Sin(\pi\,\mu)Sin(\pi\,(\gamma-\lambda))}{\pi\,Sin(\pi\,(\lambda-\mu))}P_j^2(z)$$

Donc les fonctions P^5_j et P^6_j sont des combinaisons linéaires des fonctions P^1_j et P^2_j indépendantes de j. Et à ce titre les fonctions P^5_j et P^6_j vérifient automatiquement la relation fonctionnelle d'Erdélyi. C'est d'ailleurs bien ce qu'indique Erdélyi dans son article. J'aurais d'ailleurs pu également utiliser cette remarque fait par l'auteur pour démontrer la relation fonctionnelle en ce qui concerne les fonctions P^3_j et P^4_j . On a donc bien démontré la relation :

$$\begin{cases}\varepsilon\,z\,(z-1)\,P_j{}'(z)+\{\alpha\,\beta-(\lambda+j)\,(\mu-j)\}\,z\,P_j(z)=K_{j+1}\,P_{j+1}(z)+\Lambda_j\,P_j(z)+M_{j-1}\,P_{j-1}(z)\\ K_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu-1)(j+\beta-\mu-1)(j+\gamma-\mu-1)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu-1)(2j+\lambda-\mu-2)}\\ \Lambda_j=\dfrac{(j+\alpha-\mu)(j+\beta-\mu)(j+\gamma-\mu)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu+1)}+\dfrac{(j-\alpha+\lambda)(j-\beta+\lambda)(j-\gamma+\lambda)(j-\mu)}{(2j+\lambda-\mu)(2j+\lambda-\mu-1)}\\ M_j=\dfrac{(j-\alpha+\lambda+1)(j-\beta+\lambda+1)(j-\gamma+\lambda+1)(j+\lambda)}{(2j+\lambda-\mu+1)(2j+\lambda-\mu+2)}\\ \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon\end{cases}$$

A titre indicatif je donne les combinaisons linéaires associées aux fonctions P^3_j et P^4_j en fonctions de P^1_j et P^2_j :

$$w_1(z)=P_1(a,b\,;c\,;z)={}_2F_1(a,b\,;c;z)$$
$$w_2(z)=P_2(a,b\,;c\,;z)=z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1\,;2-c\,;z)$$
$$w_3(z)=P_3(a,b\,;c\,;z)={}_2F_1(a,b\,;a+b-c+1\,;1-z)$$
$$w_4(z)=P_4(a,b\,;c\,;z)=(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b\,;c-a-b+1\,;1-z)$$
$$w_3(z)=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}w_1(z)+\frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}w_2(z)$$
$$w_4(z)=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}w_1(z)+\frac{\Gamma(c-1)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}w_2(z)$$

$$a=\lambda+j \qquad b=\mu-j \qquad c=\gamma \qquad \lambda+\mu=\gamma+\delta-1 \qquad c-a-b+1=1+\gamma-\lambda-\mu=2-\delta$$
$$c-a=\gamma-\lambda-j=\mu-j-\delta+1 \qquad c-b=\gamma-\mu+j=\lambda+j-\delta+1 \qquad a+b-c+1=\delta$$

$$\begin{cases} w_1(z)={}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\gamma\,;z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(1-\mu+j)}{\Gamma(\lambda+j)}P_j^1(z) \\ w_2(z)=z^{1-c}\,{}_2F_1(\lambda+j-\gamma+1,\mu-j-\gamma+1\,;2-\gamma\,;z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(\gamma-\mu+j)}{\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^2(z) \\ w_3(z)={}_2F_1(\lambda+j,\mu-j\,;\delta\,;1-z)=\dfrac{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\gamma-\mu+j)}{\Gamma(\lambda+j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^3(z) \\ w_4(z)=(1-z)^{1-\delta}\,{}_2F_1(\lambda+j+1-\delta,\mu-j+1-\delta\,;2-\delta\,;1-z)=P_j^4(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_j^3(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\mu-j-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\mu+j)}P_j^1(z)+(-1)^j\dfrac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\mu-j)}P_j^2(z) \\ P_j^4(z)=(-1)^j\dfrac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(1-\lambda-j)\Gamma(\lambda+j)}P_j^1(z)+(-1)^j\dfrac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(\gamma-\lambda-j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)}P_j^2(z) \end{cases}$$

$$Or\quad\begin{cases} \Gamma(\gamma-\mu+j)\Gamma(\mu-j-\gamma+1)=(-1)^j\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,(\gamma-\mu))} \qquad \Gamma(\gamma-\lambda-j)\Gamma(1-\gamma+\lambda+j)=(-1)^j\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,(\gamma-\lambda))} \\ \Gamma(1-\mu+j)\Gamma(\mu-j)=(-1)^j\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,\mu)} \qquad \Gamma(1-\lambda-j)\Gamma(\lambda+j)=(-1)^j\dfrac{\pi}{Sin(\pi\,\lambda)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_j^3(z)=\dfrac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)Sin(\pi\,(\gamma-\mu))}{\pi}P_j^1(z)+\dfrac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\delta)Sin(\pi\,\mu)}{\pi}P_j^2(z) \\ P_j^4(z)=\dfrac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(2-\delta)Sin(\pi\,\lambda)}{\pi}P_j^1(z)+\dfrac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(2-\delta)Sin(\pi\,(\gamma-\lambda))}{\pi}P_j^2(z) \end{cases}$$

Développements finis en fonctions hypergéométriques d'Ishkhanyan

L'auteur A.M.Ishkhanyan et ses condisciples ont proposé des développements finis en fonctions hypergéométriques des solutions de l'équation de Heun de paramètres :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

dans une série d'articles : en 2005, A.M.Ishkhanyan, R.Sokhoyan, D.Melikdzanian « New hypergeometric series solutions to the general Heun equation », en 2014, T.A.Ishkhanyan, A.M.Ishkhanyan « Hypergeometric expansions of the solutions of the general Heun equation ». Ces développements sont de deux types :

$$Type\quad (I)\quad y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0-j;z)$$

$$Type\quad (II)\quad y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0+j;z)$$

Ces deux développements conduisent aux relations de récurrence à trois termes suivantes sur les coefficients c_j :

$$\begin{cases}Type\quad (I)\quad A_j^{(I)}c_{j-1}+\left(B_j^{(I)}-q\right)c_j+C_j^{(I)}c_{j+1}=0\\ \begin{cases}A_j^{(I)}=(a-1)(\gamma_0-j)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0+j-1)\\ B_j^{(I)}=a\ \alpha\ \beta-(a-1)(\gamma_0-j-1)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0+j)+a\ (\gamma-\gamma_0+j)(\alpha+\beta-\gamma_0+j)\\ C_j^{(I)}=\dfrac{a\ (\alpha-\gamma_0+j+1)(\beta-\gamma_0+j+1)(\gamma-\gamma_0+j+1)}{\gamma_0-j-1}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}Type\quad (II)\quad A_j^{(II)}c_{j-1}+\left(B_j^{(II)}-q\right)c_j+C_j^{(II)}c_{j+1}=0\\ \begin{cases}A_j^{(II)}=\dfrac{a\ (\alpha-\gamma_0-j+1)(\beta-\gamma_0-j+1)(\gamma-\gamma_0-j+1)}{\gamma_0+j-1}\\ B_j^{(II)}=a\ \alpha\ \beta-(a-1)(\gamma_0+j-1)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0-j)+a\ (\gamma-\gamma_0-j)(\alpha+\beta-\gamma_0-j)\\ C_j^{(II)}=(a-1)(\gamma_0+j)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0-j-1)\end{cases}\end{cases}$$

Pour obtenir ces récurrences, il suffit de prendre en considération les expressions suivantes qui permettent de « linéariser » le développement choisi suivant des fonctions d'indices voisins. En l'occurrence, il s'agit de l'application d'expressions connues sur les fonctions hypergéométriques :

$$\frac{d^2}{dz^2}\{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\}+\left(\frac{(\gamma_0\pm j)}{z}+\frac{1+\alpha+\beta-(\gamma_0\pm j)}{z-1}\right)\frac{d}{dz}\{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\}+\frac{\alpha\ \beta}{z\ (z-1)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)=0$$

$$\begin{cases}z\ \dfrac{d}{dz}\{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\}=(\gamma_0\pm j-1)\left({}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j-1;z)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\right)\\ (1-z)\dfrac{d}{dz}\{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\}=\dfrac{(\gamma_0\pm j-\alpha)(\gamma_0\pm j-\beta)}{c}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j+1;z)+(\alpha+\beta-(\gamma_0\pm j))\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dz}\{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)\}=(\gamma_0\pm j-1)\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j-1;z)+(1+\alpha+\beta-2(\gamma_0\pm j))\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j;z)+\frac{(\gamma_0\pm j-\alpha)(\gamma_0\pm j-\beta)}{c}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0\pm j+1;z)$$

En tenant compte de la relation de Fuchs qui a lieu sur l'équation différentielle de Heun :

$$1+\alpha+\beta=\gamma+\delta+\varepsilon$$

Les conditions d'arrêt du développement en j=0 sont déterminées par l'annulation du terme C de la récurrence en j=-1 et conduisent à contraindre le paramètre γ_0 à des valeurs précises, soit :

$$Type \quad (I) \quad C_{-1}^{(I)} = 0 \Rightarrow (\alpha - \gamma_0)(\beta - \gamma_0)(\gamma - \gamma_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = \alpha \\ \gamma_0 = \beta \\ \gamma_0 = \gamma \end{cases}$$

$$Type \quad (II) \quad C_{-1}^{(II)} = 0 \Rightarrow (\gamma_0 - 1)(\gamma + \varepsilon - \gamma_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \end{cases}$$

Dans les développements de type (II), la valeur γ_0=1 n'est pas licite puisque la récurrence présente pour le terme c_{-1} une forme indéterminée : $Type \quad (II) \quad A_0^{(II)} c_{-1} = \frac{0}{0}$*. La relation de récurrence n'est donc plus respectée.*

Les développements infinis commençant à l'indice j=0 sont donc de la forme :

$$\begin{cases} Type \quad (I) \quad A_j^{(I)} c_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right) c_j + C_j^{(I)} c_{j+1} = 0 \\ \gamma_0 = \alpha \rightarrow \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\alpha - j)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\alpha - j - 1)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j) + a\,(\gamma - \alpha + j)(\beta + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(j+1)(\beta - \alpha + j + 1)(\gamma - \alpha + j + 1)}{\alpha - j - 1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Type \quad (I) \quad A_j^{(I)} c_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right) c_j + C_j^{(I)} c_{j+1} = 0 \\ \gamma_0 = \beta \rightarrow \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\beta - j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\beta - j - 1)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) + a\,(\gamma - \beta + j)(\alpha + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(j+1)(\alpha - \beta + j + 1)(\gamma - \beta + j + 1)}{\beta - j - 1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Type \quad (I) \quad A_j^{(I)} c_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right) c_j + C_j^{(I)} c_{j+1} = 0 \\ \gamma_0 = \gamma \rightarrow \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\gamma - j)(\varepsilon + j - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\gamma - j - 1)(\varepsilon + j) + a\,j\,(\alpha + \beta - \gamma + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(j+1)(\alpha - \gamma + j + 1)(\beta - \gamma + j + 1)}{\gamma - j - 1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Type \quad (II) \quad A_j^{(II)} c_{j-1} + \left(B_j^{(II)} - q\right) c_j + C_j^{(II)} c_{j+1} = 0 \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \rightarrow \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(\alpha - \gamma - \varepsilon - j + 1)(\beta - \gamma - \varepsilon - j + 1)(-\varepsilon - j + 1)}{\gamma + \varepsilon + j - 1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\gamma + \varepsilon + j)(j+1) \end{cases} \end{cases}$$

Pour que les développements soit finis, il convient que le terme A de la récurrence s'annule à son tour pour une valeur donnée N+1 de l'indice j :

$$\begin{cases} Type \quad (I) \quad A_j^{(I)} c_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right) c_j + C_j^{(I)} c_{j+1} = 0 \\ A_{N+1}^{(I)} = 0 \Rightarrow \gamma + \varepsilon - \gamma_0 + N = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = \alpha \Rightarrow \varepsilon = \alpha - \gamma - N \\ \gamma_0 = \beta \Rightarrow \varepsilon = \beta - \gamma - N \\ \gamma_0 = \gamma \Rightarrow \varepsilon = -N \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} Type \quad (II) \quad A_j^{(II)} c_{j-1} + \left(B_j^{(II)} - q\right) c_j + C_j^{(II)} c_{j+1} = 0 \\ A_{N+1}^{(II)} = 0 \Rightarrow \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon = \alpha - \gamma - N \\ \varepsilon = \beta - \gamma - N \\ \varepsilon = -N \end{cases} \end{cases}$$

Il s'avère qu'en réalité les développements <u>finis</u> de type I et II correspondent à des développements identiques. Comparons les deux développements <u>finis</u> de type II :

$$Type \quad (I) \quad A_j^{(I)} \tilde{c}_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right) \tilde{c}_j + C_j^{(I)} \tilde{c}_{j+1} = 0 \quad \begin{cases} \gamma_0 = \alpha \quad \varepsilon = \alpha - \gamma - N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} \tilde{c}_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha - j; z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{j=N} \tilde{c}_{\tilde{j}} \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \tilde{j} - N; z) \leftarrow \tilde{j} = N - j \\ \gamma_0 = \beta \quad \varepsilon = \beta - \gamma - N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} \tilde{c}_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta - j; z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{j=N} \tilde{c}_{\tilde{j}} \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta + \tilde{j} - N; z) \leftarrow \tilde{j} = N - j \\ \gamma_0 = \gamma \quad \varepsilon = -N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} \tilde{c}_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma - j; z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{j=N} \tilde{c}_{\tilde{j}} \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma + \tilde{j} - N; z) \leftarrow \tilde{j} = N - j \end{cases}$$

$$Type \quad (II) \quad A_j^{(II)} c_{j-1} + \left(B_j^{(II)} - q\right) c_j + C_j^{(II)} c_{j+1} = 0 \quad \begin{cases} \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \quad \varepsilon = \alpha - \gamma - N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + j - N; z) \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \quad \varepsilon = \beta - \gamma - N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta + j - N; z) \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon \quad \varepsilon = -N \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma + j - N; z) \end{cases}$$

Les fonctions hypergéométriques sont donc les mêmes.

Pour les coefficients de la récurrence des développements de type I et II:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha \\ \varepsilon = \alpha - \gamma - N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\alpha - j)(j - N - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\alpha - j - 1)(j - N) + a\,(\gamma - \alpha + j)(\beta + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(j+1)(\beta - \alpha + j + 1)(\gamma - \alpha + j + 1)}{\alpha - j - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon = \alpha - \gamma - N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \alpha - N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(N - j + 1)(\beta - \alpha + N - j + 1)(\gamma - \alpha + N - j + 1)}{\alpha - N + j - 1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\alpha - N + j - 1) + a\,(\gamma - \alpha + N - j)(\beta + N - j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\alpha - N + j)(j+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \beta \\ \varepsilon = \beta - \gamma - N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\beta - j)(j - N - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\beta - j - 1)(j - N) + a\,(\gamma - \beta + j)(\alpha + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(\alpha - \beta + j + 1)(j+1)(\gamma - \beta + j + 1)}{\beta - j - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon = \beta - \gamma - N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \beta - N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(\alpha - \beta + N - j + 1)(N - j + 1)(\gamma - \beta + N - j + 1)}{\beta - N + j - 1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\beta - N + j - 1) + a\,(\gamma - \beta + N - j)(\alpha + N - j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\beta - N + j)(j+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma \\ \varepsilon = -N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(I)} = (a-1)(\gamma - j)(j - N - 1) \\ B_j^{(I)} = a\,\alpha\,\beta - (a-1)(\gamma - j - 1)(j - N) + a\,j\,(\alpha + \beta - \gamma + j) \\ C_j^{(I)} = \dfrac{a\,(\alpha - \gamma + j + 1)(\beta - \gamma + j + 1)(j+1)}{\gamma - j - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon = -N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \gamma - N \end{cases} \quad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(\alpha - \gamma + N - j + 1)(\beta - \gamma + N - j + 1)(N - j + 1)}{\gamma - N + j - 1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\gamma - N + j - 1) + a\,(N - j)(\alpha + \beta - \gamma + N - j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\gamma - N + j)(j+1) \end{cases}$$

Pour chacune des trois situations de développement fini, il vient systématiquement les relations suivantes : $A_j^{(I)} = C_{N-j}^{(II)} \quad B_j^{(I)} = B_{N-j}^{(II)} \quad C_j^{(I)} = A_{N-j}^{(II)}$. *Dans ces conditions les coefficients de la récurrence de type I ordonnés en sens inverse, suivent les mêmes relations de récurrence que la récurrence de type II :*

$$Type \quad (I) \quad \begin{cases} A_j^{(I)}\tilde{c}_{j-1} + \left(B_j^{(I)} - q\right)\tilde{c}_j + C_j^{(I)}\tilde{c}_{j+1} = 0 \\ A_j^{(I)} = C_{N-j}^{(II)} \qquad B_j^{(I)} = B_{N-j}^{(II)} \qquad C_j^{(I)} = A_{N-j}^{(II)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{N-j}^{(I)}\tilde{c}_{N-j-1} + \left(B_{N-j}^{(I)} - q\right)\tilde{c}_{N-j} + C_{N-j}^{(I)}\tilde{c}_{N-j+1} = 0$$

$$\Rightarrow A_j^{(II)}\tilde{c}_{N-j+1} + \left(B_j^{(II)} - q\right)\tilde{c}_{N-j} + C_j^{(II)}\tilde{c}_{N-j-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{N-j+1} = \tilde{c}_{\tilde{j}-1} = c_{j-1} \\ \tilde{c}_{N-j} = \tilde{c}_{\tilde{j}} = c_j \\ \tilde{c}_{N-j-1} = \tilde{c}_{\tilde{j}+1} = c_{j+1} \end{cases}$$

A une constante multiplicative près, on peut donc écrire :

$$Type \quad (I) \Leftrightarrow Type \quad (II) \qquad \begin{cases} \gamma_0 = \alpha \Rightarrow y(z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{j=N} \tilde{c}_{\tilde{j}} \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\alpha+\tilde{j}-N;z\right) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\alpha+j-N;z\right) \\ \gamma_0 = \beta \Rightarrow y(z) = \sum_{\tilde{j}=0}^{j=N} \tilde{c}_{\tilde{j}} \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\beta+\tilde{j}-N;z\right) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\beta+j-N;z\right) \\ \gamma_0 = \gamma \Rightarrow y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} \tilde{c}_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma-j;z\right) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma+j-N;z\right) \end{cases}$$

Dans ces conditions et conformément aux articles des auteurs A.M.Ishkhanyan, R.Sokhoyan, D.Melikdzanian, T.A.Ishkhanyan je n'étudierais que les ***<u>développements finis</u>*** *de type II. Précisons la forme des deux premiers développements de type II :*

$$\begin{cases} \varepsilon = \alpha - \gamma - N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \alpha - N \end{cases} \qquad y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\alpha+j-N;z\right) \qquad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(N-j+1)(\beta-\alpha+N-j+1)(\gamma-\alpha+N-j+1)}{\alpha-N+j-1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\alpha-N+j-1) + a\,(\gamma-\alpha+N-j)(\beta+N-j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\alpha-N+j)(j+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \beta - \gamma - N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \beta - N \end{cases} \qquad y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\beta+j-N;z\right) \qquad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a\,(\alpha-\beta+N-j+1)(N-j+1)(\gamma-\beta+N-j+1)}{\beta-N+j-1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j\,(a-1)(\beta-N+j-1) + a\,(\gamma-\beta+N-j)(\alpha+N-j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\beta-N+j)(j+1) \end{cases}$$

Les deux premiers développements sont symétriques par l'inter-change des paramètres α<->β. Il suffit de regarder donc le premier développement : $y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j \; {}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+j-N;z)$. *Appliquons une transformation connue des fonctions hypergéométriques :* ${}_2F_1(a,b;a+j;z)=(1-z)^{j-b}\,{}_2F_1(j,a-b+j;a+j;z)$ *sur les fonctions de ce développement :*

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j \,(1-z)^{j-N-\beta}\,{}_2F_1(-N+j,\alpha-\beta-N+j;\alpha-N+j;z)$$

$$Or \quad \varepsilon+\gamma+\delta=\alpha+\beta+1=\alpha+\delta-N \Rightarrow 1-\delta=-N-\beta \Rightarrow y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j \,(1-z)^{j+1-\delta}\,{}_2F_1(-N+j,\alpha-\beta-N+j;\alpha-N+j;z)$$

$$De\ plus \quad {}_2F_1(j-N,\alpha-\beta-N+j;\alpha-N+j;z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(j-N)_l(\alpha-\beta-N+j)_l}{(\alpha-N+j)_l}\frac{z^l}{l!}=\sum_{l=0}^{l=N-j}\frac{(j-N)_l(\alpha-\beta-N+j)_l}{(\alpha-N+j)_l}\frac{z^l}{l!}$$

$$\Rightarrow y(z)=(1-z)^{1-\delta}\sum_{j=0}^{j=N} c_j\,(1-z)^j\sum_{l=0}^{l=N-j}\frac{(j-N)_l(\alpha-\beta-N+j)_l}{(\alpha-N+j)_l}\frac{z^l}{l!}\Rightarrow\frac{y(z)}{(1-z)^{1-\delta}}=Polynome\ de\ degré\ \le N$$

Comme les articles indiquent que la fonction $y(z)(1-z)^{\delta-1}$ *est elle-même une solution d'une autre équation de Heun avec des paramètres différents. Dès lors les deux premiers développements ne sont jamais qu'une re-écriture des solutions polynomiales de Heun à l'aide de fonctions hypergéométriques. Ces deux développements ne forment donc pas de nouvelles solutions algébriques.*

Voici quand même les expressions suffisamment simples et polynomiales des deux premiers développements finis (N=0 et N=1).

Pour N=0, il vient :

$$\begin{cases}\gamma_0=\alpha \quad \varepsilon=\alpha-\gamma \quad \delta=1+\beta \rightarrow q=a\gamma\beta=a\gamma(\delta-1)\\ y(z)=(1-z)^{1-\delta}\sum_{j=0}^{j=N} c_j\,(1-z)^j\sum_{l=0}^{l=N-j}\frac{(j-N)_l(\alpha-\beta-N+j)_l}{(\alpha-N+j)_l}\frac{z^l}{l!}=(1-z)^{1-\delta}c_0\frac{(-N)_0(\alpha-\beta-N)_0}{(\alpha-N+j)_0}=(1-z)^{1-\delta}\end{cases}$$

Pour N=1, il vient :

$$N=1 \qquad \gamma_0=\alpha \quad \varepsilon=\alpha-\gamma-1 \quad \delta=\alpha+\beta+1-\gamma-\varepsilon=\beta+2\rightarrow\beta=\delta-2$$

$$B_j^{(II)}=a\,\alpha\,\beta+a\,(\gamma-\alpha+1)(\beta+1)=a\,\alpha\,\beta+a\,\varepsilon(1-\delta)$$

$$C_0^{(II)}=(1-a)(\alpha-1)$$

$$\left(B_0^{(II)}-q\right)c_0+C_0^{(II)}c_1=0\Rightarrow c_1=c_0\frac{q-B_0^{(II)}}{C_0^{(II)}}=c_0\frac{q-a\,(\alpha\,\beta+\varepsilon(1-\delta))}{(1-a)(\alpha-1)}$$

$$q \quad racine\ de \quad \begin{cases}q^2+q(\alpha-1-a(\beta+\gamma+2\beta\gamma))+a\beta\gamma(-\alpha+a(1+\beta)(1+\gamma))=0\\ \Leftrightarrow q^2+q(\alpha-1-a(\delta-2+\gamma(2\delta-3)))+a\gamma(\delta-2)(-\alpha+a(\delta-1)(1+\gamma))=0\end{cases}$$

$$y(z)=(1-z)^{1-\delta}\left(c_0\left\{1+\frac{(-1)_1(\alpha-\delta+1)_1}{(\alpha-1)_1}z\right\}+c_1\,(1-z)\right)=(1-z)^{1-\delta}\left(c_0\left\{1-\frac{\alpha-\delta+1}{\alpha-1}z\right\}+c_1\,(1-z)\right)$$

$$\Rightarrow y(z)=c_0\,(1-z)^{1-\delta}\left(\left\{1-\frac{\alpha-\delta+1}{\alpha-1}z\right\}+\frac{q-a\,(\alpha\,\beta+\varepsilon(1-\delta))}{(1-a)(\alpha-1)}(1-z)\right)$$

Par contre le troisième développement des solutions de type II est plus intéressant comme l'indique T.A.Ishkhanyan dans l'article de 2018 (je le note développement II.3), car il ne conduit pas à une forme polynomiale, mais il reste fini :

$$\begin{cases} \varepsilon = -N \\ \gamma_0 = \gamma + \varepsilon = \gamma - N \end{cases} \qquad y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j \, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma + j - N; z) \qquad \begin{cases} A_j^{(II)} = \dfrac{a(\alpha - \gamma + N - j + 1)(\beta - \gamma + N - j + 1)(N - j + 1)}{\gamma - N + j - 1} \\ B_j^{(II)} = a\,\alpha\,\beta + j(a-1)(\gamma - N + j - 1) + a(N - j)(\alpha + \beta - \gamma + N - j) \\ C_j^{(II)} = -(a-1)(\gamma - N + j)(j+1) \end{cases}$$

Je le note donc : $\begin{cases} A_j^{(II.3)} = \dfrac{a(\alpha - \gamma + N - j + 1)(\beta - \gamma + N - j + 1)(N - j + 1)}{\gamma - N + j - 1} \\ B_j^{(II.3)} = a\,\alpha\,\beta + j(a-1)(\gamma - N + j - 1) + a(N - j)(\alpha + \beta - \gamma + N - j) \\ C_j^{(II.3)} = -(a-1)(\gamma - N + j)(j+1) \end{cases}$*, et les coefficients* c_j *sont solutions*

d'un système linéaire fini d'ordre N+1 :

$$A_j^{(II.3)} c_{j-1} + \left(B_j^{(II.3)} - q\right) c_j + C_j^{(II.3)} c_{j+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} B_0^{(II.3)} - q & C_0^{(II.3)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_1^{(II.3)} & B_1^{(II.3)} - q & C_1^{(II.3)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{(II.3)} & B_2^{(II.3)} - q & C_2^{(II.3)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{N-1}^{(II.3)} & B_{N-1}^{(II.3)} - q & C_{N-1}^{(II.3)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_N^{(II.3)} & B_N^{(II.3)} - q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dès lors que ce développement est fini, cela signifie que le déterminant associé du système linéaire des coefficients c_j *doit s'annuler, soit :*

$$Det\left(\begin{bmatrix} B_0^{(II.3)} - q & C_0^{(II.3)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_1^{(II.3)} & B_1^{(II.3)} - q & C_1^{(II.3)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{(II.3)} & B_2^{(II.3)} - q & C_2^{(II.3)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{N-1}^{(II.3)} & B_{N-1}^{(II.3)} - q & C_{N-1}^{(II.3)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_N^{(II.3)} & B_N^{(II.3)} - q \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ce qui détermine donc q comme racines d'un polynôme de degré N+1. Par exemple le cas le plus simple étant N=0 pour une seule équation linéaire, il vient trivialement :

$$j = 0 \Rightarrow B_0^{(II.3)} = a\,\alpha\,\beta \qquad M = \left[B_0^{(II.3)} - q\right] \Rightarrow Det(M) = 0 \Leftrightarrow q = B_0^{(II.3)} = a\,\alpha\,\beta$$

Les premières expressions de ces développements finis sont assez triviales à déterminer. Pour N=0, il vient comme on vient de le voir : $\begin{cases}\varepsilon=0\\ \gamma_0=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=a\,\alpha\,\beta\\ y(z)=c_0\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\end{cases}$. *Il s'agit donc du cas de dégénérescence de l'équation de Heun vers l'équation hypergéométrique.*

Pour N=1, il vient :

$$\begin{cases}\varepsilon=-1\\ \gamma_0=\gamma-1\end{cases}\quad\begin{cases}q\quad \text{racines de}\quad q^2-q\,(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta))+a\,\alpha\,\beta((1+\alpha)(1+\beta)-\gamma)=0\\ y(z)=\sum_{j=0}^{j=1}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+j-1;z)=c_0\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+c_1\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(B_0^{(II)}-q\right)c_0+C_0^{(II)}c_1=0\\ C_0^{(II)}=(1-a)(\gamma-1)\\ B_0^{(II)}=a\,\alpha\,\beta+a\,(\alpha+\beta+1-\gamma)=a\,\alpha\,\beta+a\,(\delta-1)\end{cases}\Rightarrow c_1=c_0\frac{q-B_0^{(II)}}{C_0^{(II)}}=c_0\frac{q-a\,\alpha\,\beta+a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-1)}$$

$$y(z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+\frac{q-a\,\alpha\,\beta+a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-1)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

Equation du second degré

$$q^2-q\,(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta))+a\,\alpha\,\beta((1+\alpha)(1+\beta)-\gamma)=0$$
$$\Leftrightarrow(q-a\,\alpha\,\beta+a(1-\delta))(q-a\,\alpha\,\beta+(a-1)(1-\gamma))-a(1-a)(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)=0$$

Pour N=2, il vient :

$$\begin{cases}\varepsilon=-2\\ \gamma_0=\gamma-2\end{cases}\quad\begin{cases}q\quad \text{racines de}\\ \left((q-a\,\alpha\,\beta)^2+(q-a\,\alpha\,\beta)\,(4a-a(3+\alpha+\beta)-2+\gamma)+2\,a\,(a-1)\alpha\,\beta\right)\times\\ \times(q-a\,\alpha\,\beta-2a(1+\alpha+\beta)-2+2\gamma)+2\,a\,(a-1)(q-a\,\alpha\,\beta)(1+\alpha)(1+\beta)=0\\ y(z)=\sum_{j=0}^{j=2}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+j-1;z)=c_0\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-2;z)+c_1\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+c_2\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(B_0^{(II)}-q\right)c_0+C_0^{(II)}c_1=0\\ A_1^{(II)}c_0+\left(B_1^{(II)}-q\right)c_1+C_1^{(II)}c_2=0\\ C_0^{(II)}=(1-a)(\gamma-2)\\ B_0^{(II)}=a\,\alpha\,\beta+2a\,(\delta-1)\\ A_1^{(II)}=\dfrac{2a\,(\alpha-\gamma+2)\,(\beta-\gamma+2)}{\gamma-2}\\ C_1^{(II)}=2(1-a)(\gamma-1)\\ B_1^{(II)}=a\,\alpha\,\beta+(a-1)(\gamma-2)+a\,(\delta-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=c_0\dfrac{q-B_0^{(II)}}{C_0^{(II)}}=c_0\dfrac{q-a\,\alpha\,\beta+2a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-2)}\\ c_2=c_0\dfrac{\begin{Bmatrix}q(\gamma-2+q)-a(\alpha\,\beta\,\gamma+q(\alpha+\beta+2\alpha\,\beta+2\delta-3))+\\ +a^2(\alpha\,\beta((1+\alpha)(1+\beta)+2(\delta-1))+2(\delta-1)(\delta-2))\end{Bmatrix}}{2(a-1)^2(\gamma-1)(\gamma-2)}\end{cases}$$

$$y(z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-2;z)+\frac{q-a\,\alpha\,\beta+2a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-2)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+$$
$$+\frac{\begin{Bmatrix}q(\gamma-2+q)-a(\alpha\,\beta\,\gamma+q(\alpha+\beta+2\alpha\,\beta+2\delta-3))+\\ +a^2(\alpha\,\beta((1+\alpha)(1+\beta)+2(\delta-1))+2(\delta-1)(\delta-2))\end{Bmatrix}}{2(a-1)^2(\gamma-1)(\gamma-2)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

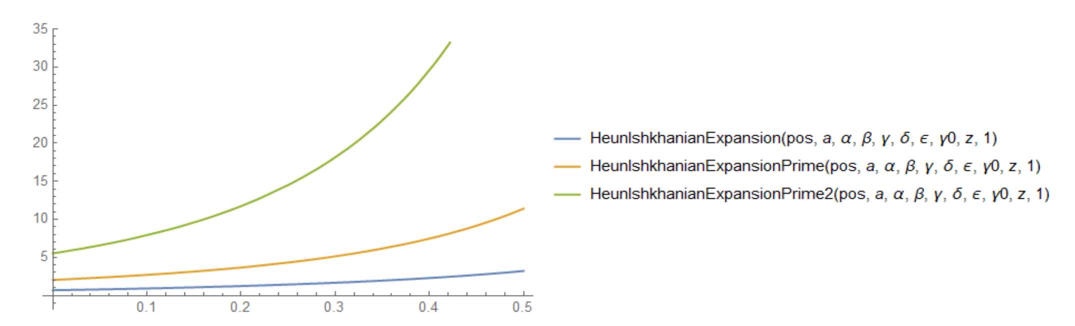
Question de la convergence ou de la divergence des séries infinis de type (I) et (II)

On a donc vu que les séries finies d'Ishkhanyan de type I sont en réalité des séries finies de type II. De plus les séries finies de type II.1 et II.2 sont apparentées aux polynômes de Heun. Il reste donc à se poser la question de la convergence des séries infinies de type I.1, I.2, I.3 et II.3.

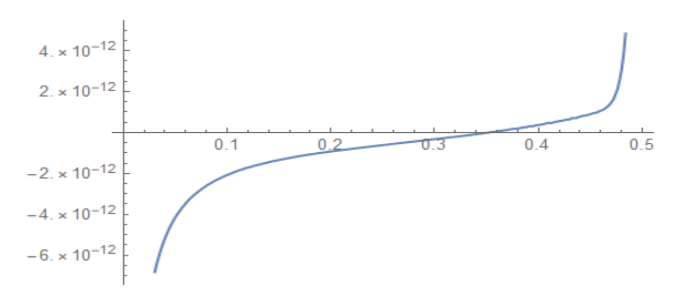
Je ne donne pas de résultats formels en la matière, mais j'ai testé numériquement les convergences des séries initiées par Ishkhanyan. La convergence des séries infinies de type I.1, I.2, I.3 est vérifiée lorsque q est solution de l'équation déterminantale « infinie » suivante (ici je ne donne que le développement I.1 mais il en est de même avec les développements I.2 et I.3)

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} B_0^{(I.1)}-q & C_0^{(I.1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_1^{(I.1)} & B_1^{(I.1)}-q & C_1^{(I.1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{(I.1)} & B_2^{(I.1)}-q & C_2^{(I.1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N-1}^{(I.1)} & B_{N-1}^{(I.1)}-q & C_{N-1}^{(I.1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N^{(I.1)} & B_N^{(I.1)}-q \end{bmatrix}\right)=0$$

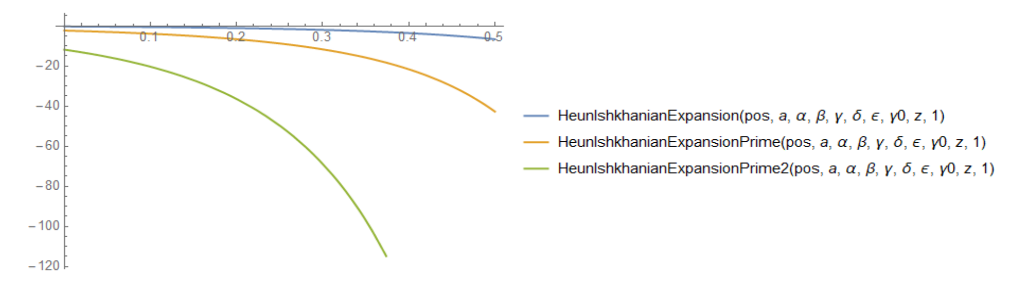
En prenant une valeur de N suffisamment grande les premières racines q peuvent suffisamment bien approximées. A titre d'exemples prenons : a=1.2, α=7/8, β=3/4, γ=7/13 et δ=2/27. Sachant que ε=α+β+1-γ-δ pour le cas $\gamma_0=\alpha$, les graphes de la fonction et de ses deux premières dérivées sont :



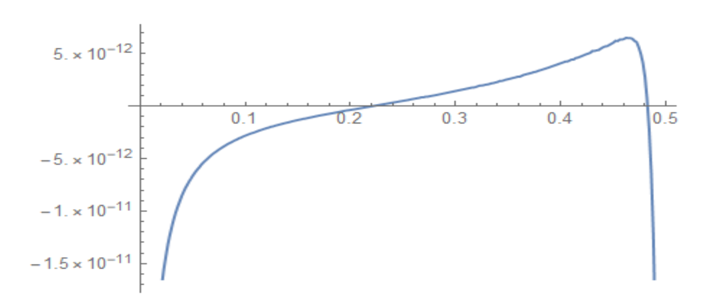
Le graphe reprenant l'équation différentielle de Heun est « numériquement » nul :



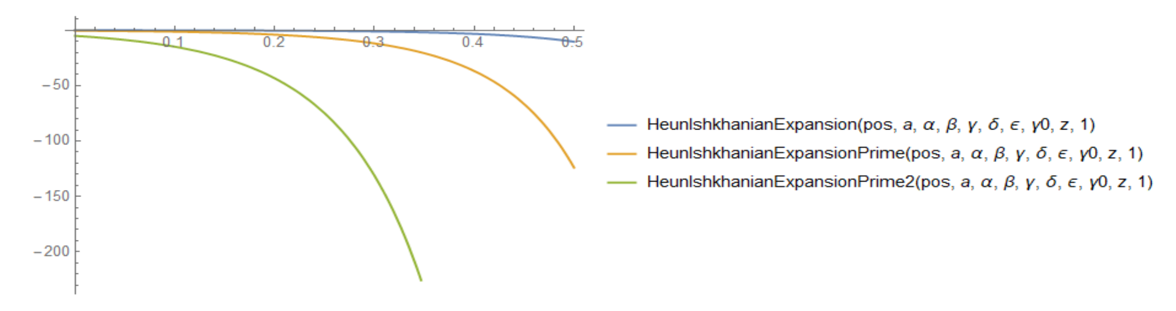
Prenons maintenant : a=1.2, α=7/8, β=3/4, γ=7/13 et δ=2/27. Sachant que ε=α+β+1-γ-δ pour le cas $\gamma_0=\beta$, les graphes de la fonction et de ses deux premières dérivées sont :



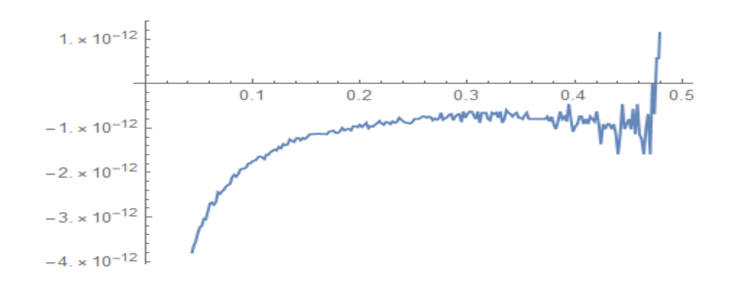
Le graphe reprenant l'équation différentielle de Heun est « numériquement » nul :



Et finalement prenons : a=1.2, α=7/8, β=3/4, γ=7/13 et δ=2/27. Sachant que ε=α+β+1-γ-δ pour le cas $\gamma_0=\gamma$*, les graphes de la fonction et de ses deux premières dérivées sont :*



Le graphe reprenant l'équation différentielle de Heun est « numériquement » nulle :



Important : je n'ai pas trouvé de convergence numérique pour les séries infinies de type II (soit pour $\gamma_0=\varepsilon+\gamma$*)* *<u>même lorsque q est racine de l'équation déterminantale</u> « infinie » suivante:*

$$\lim_{N\to\infty} Det\left(\begin{bmatrix} B_0^{(II.3)}-q & C_0^{(II.3)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_1^{(II.3)} & B_1^{(II.3)}-q & C_1^{(II.3)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{(II.3)} & B_2^{(II.3)}-q & C_2^{(II.3)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N-1}^{(II.3)} & B_{N-1}^{(II.3)}-q & C_{N-1}^{(II.3)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N^{(II.3)} & B_N^{(II.3)}-q \end{bmatrix}\right)=0$$

Ces solutions étudiées de développement II.3 par les auteurs A.M.Ishkhanyan, R.Sokhoyan, D.Melikdzanian, T.A.Ishkhanyan ont cette particularité que ce sont en fait des fonctions hypergéométriques généralisées. Elles ont été successivement exhibées dans divers articles :

- 1994, J.Letessier, G.Valent J.Wimp « Some differential equations satisfied by hypergeometric functions »
- 2011-2012, K.Takemura « Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial »
- 2018, T.A.Ishkhanyan, A.M.Ishkhanyan, « Gauss-hypergeometric expansions of the general Heun functions governed by two-term recurrence relations »
- 2018, T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan, « Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two-Term Recurrence »

Dans ces trois articles les notations et les expressions ne sont pas forcément toujours les mêmes, aussi vais-je m'efforçais d'unifier les propos, autant que faire se peut. L'idée de base est de montrer que la construction de ces solutions particulières des fonctions de Heun à l'aide de fonctions hypergéométriques 2F1, conduit à des solutions déterminées par une récurrence à deux termes et sont en réalité elles-mêmes des fonctions généralisées hypergéométriques.

Commençons simplement par le rappel de l'équation différentielle hypergéométrique de la fonction 2F1 :

$$y(z) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$
$$\left\{z\left(z\frac{d}{dz}+\alpha\right)\left(z\frac{d}{dz}+\beta\right)\right\}y(z) = \left\{z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma-1\right)\right\}y(z) \Leftrightarrow z(1-z)y''(z)+(\gamma-z(\alpha+\beta+1))y'(z)-\alpha\,\beta\,y(z)=0$$

On a vu ci-avant que l'équation de Heun se réduisait à une telle équation dans le cas N=0.

Les fonctions généralisées hypergéométriques se notent : $y(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix};z\right)$

Elles sont solutions de l'équation différentielle suivantes : $\left\{\prod_{l=1}^{l=p}\left(z\frac{d}{dz}+a_l\right)\right\}y(z) = \left\{\frac{d}{dz}\prod_{l=1}^{l=q}\left(z\frac{d}{dz}+b_l-1\right)\right\}y(z)$

Une des solutions de cette équation différentielle est la fonction généralisée hypergéométrique dont le développement en série autour du point singulier régulier z=0 est le suivant :

$$y(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix};z\right) = \sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{(a_1)_l\ldots(a_p)_l}{(b_1)_l\ldots(b_q)_l}\frac{z^l}{l!} = \sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{\Gamma(a_1+l)\ldots\Gamma(a_p+l)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)}\frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(b_1+l)\ldots\Gamma(b_q+l)}\frac{z^l}{l!}$$

Dans l'article de K.Takemura, il note l'opérateur différentiel de l'équation des fonctions généralisées hypergéométrique : $L_{a_1,a_2,\dots,a_p;b_1,b_2,\dots,b_q}$ *comme étant l'opérateur différentiel dont le coefficient de l'ordre maximal est 1, soit l'opérateur différentiel « monomial » pour lequel la fonction généralisée hypergéométrique est solution de l'équation :* $L_{a_1,a_2,\dots,a_p;b_1,b_2,\dots,b_q}\{y(z)\}=0$

Par exemple pour une fonction 3F2 (voir K.Takemura), il vient l'opérateur différentiel suivant:

$$y(z) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1,a_2,a_3 \\ b_1,b_2 \end{matrix};z\right)$$

$$L_{a_1,a_2,a_3;b_1,b_2} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{d^3}{dz^3} + \dfrac{(a_1+a_2+a_3+3)\,z-(b_1+b_2+1)}{z\,(z-1)}\dfrac{d^2}{dz^2} + \\ + \dfrac{(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1+a_2+a_3+1)\,z-b_1b_2}{z^2(z-1)}\dfrac{d}{dz} + \dfrac{a_1a_2a_3}{z^2(z-1)} \end{matrix}\right\}$$

En 1994, les auteurs J.Letessier, G.Valent, J.Wimp étudie l'équation différentielle des fonctions généralisées hypergéométriques de la forme suivante :

$$y(z) = {}_{p+r}F_{q+r}\left(\begin{matrix} a_1,a_2,\dots,a_p,e_1+1,\dots,e_r+1 \\ b_1,b_2,\dots,b_q,e_1,\dots,e_r \end{matrix};z\right)$$

Ils montrent que ces fonctions satisfont à une équation différentielle dont les coefficients sont des polynômes.

L'un des principaux algorithmes, exposé dans l'article « Some differential equations satisfied by hypergeometric functions », consiste à calculer l'équation différentielle d'une fonction dérivée donnée à partir de l'expression de l'équation différentielle de la fonction de base. Plus précisément soit l'équation différentielle de degré s de la fonction f :

$$f(x) \quad / \quad L\left(\frac{d}{dx}\right)\{f(x)\}=0 \qquad avec \qquad L\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{l=0}^{l=s}\mu_l(x)\frac{d^l}{dx^l}$$

Alors la fonction g dérivée de f par la formule : $g(x)=X(x)f'(x)+c\,f'(x) \quad avec \quad X(x)=a\,x+b$*, satisfait à l'équation différentielle suivante de même degré s :* $K\left(\frac{d}{dx}\right)\{g(x)\}=0 \quad avec \quad K\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{l=0}^{l=s}\rho_l(x)\frac{d^l}{dx^l}$*. Les coefficients* $\rho_l(x)$ *sont calculés par l'algorithme suivant :*

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{j=0}^{j=s}\mu_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \qquad K\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{j=0}^{j=s}\rho_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \qquad X(x)=a\,x+b \qquad c_j=c+a\,j$$

$$l_j(x)=\frac{(-1)^j}{(X(x))^j}\prod_{k=0}^{k=j-1}c_j \Rightarrow l_0(x)=1 \qquad l_{s+1}(x)=-\frac{c_s l_s(x)}{X(x)}$$

$$R(x)=(X(x))^{\frac{c}{a}}L\left(\frac{d}{dx}\right)\left\{(X(x))^{-\frac{c}{a}}\right\}=\sum_{j=0}^{j=s}\mu_j(x)l_j(x) \qquad S(x)=(X(x))^{\frac{c}{a}}\frac{d}{dx}\left\{L\left(\frac{d}{dx}\right)\left\{(X(x))^{-\frac{c}{a}}\right\}\right\}=R'(x)-\frac{c}{X(x)}R(x)$$

$$\sigma_j(x)=\mu_{j-1}(x)+\mu_j'(x) \qquad j\in\{0,\dots,s+1\} \qquad \sigma_0(x)=\mu_0'(x) \qquad \sigma_{s+1}(x)=\mu_s(x)$$

$$\rho_j(x)=\frac{1}{c_l l_j(x)}\left\{S(x)\sum_{k=l}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x)-R(x)\sum_{k=l}^{k=s}\sigma_{k+1}(x)l_{k+1}(x)\right\}$$

Les coefficients $\rho_0(x), \rho_s(x)$ ont les expressions simplifiés suivantes :

$$\rho_j(x) = \frac{1}{c_l l_j(x)}\left\{S(x)\sum_{k=l}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x) - R(x)\sum_{k=l}^{k=s}\sigma_{k+1}(x)l_{k+1}(x)\right\} \Rightarrow \rho_s(x) = \frac{R(x)\mu_s(x)}{X(x)}$$

$$\rho_0(x) = \frac{1}{c_0 l_0(x)}\left\{S(x)\sum_{k=0}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x) - R(x)\sum_{k=0}^{k=s}\sigma_{k+1}(x)l_{k+1}(x)\right\}$$

$$\Rightarrow \rho_0(x) = \frac{1}{c}\left\{S(x)\sum_{k=0}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x) - R(x)\sum_{k=0}^{k=s}(\mu_k(x)+\mu_{k+1}'(x))l_{k+1}(x)\right\} = \frac{1}{c}\left\{S(x)\sum_{k=0}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x) - R(x)\sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_{k+1}(x) - R(x)\sum_{k=1}^{k=s}\mu_k'(x)l_k(x)\right\}$$

$$R(x) = \sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k(x) \qquad R'(x) = \sum_{k=0}^{k=s}(\mu_k'(x)l_k(x)+\mu_k(x)l_k'(x)) \qquad l_k'(x) = -\frac{k\,a}{X(x)}l_k(x) \qquad l_{k+1}(x) = -\frac{l_k(x)c_k}{X(x)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=s}\mu_k'(x)l_k(x) = R'(x) - \mu_0'(x) - \sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k'(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_{k+1}(x) = -\frac{1}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k(x)c_k = -\left(\frac{c}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k(x) + \frac{a}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}k\,\mu_k(x)l_k(x)\right) = -\frac{c\,R(x)}{X(x)} - \frac{a}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}k\,\mu_k(x)l_k(x)$$

$$\text{De plus} \quad \sum_{k=0}^{k=s-1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x) = R(x) - \mu_0(x) \quad \text{et} \quad S(x) = R'(x) - \frac{c}{X(x)}R(x) \Rightarrow S(x)R(x) + \frac{c\,(R(x))^2}{X(x)} = R(x)R'(x)$$

$$\Rightarrow \rho_0(x) = \frac{1}{c}\left\{S(x)(R(x)-\mu_0(x)) + \frac{c\,(R(x))^2}{X(x)} + \frac{aR(x)}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}k\,\mu_k(x)l_k(x) - R(x)\left(R'(x) - \mu_0'(x) - \sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k'(x)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \rho_0(x) = \frac{1}{c}\left\{R(x)\mu_0'(x) - S(x)\mu_0(x) + \frac{aR(x)}{X(x)}\sum_{k=0}^{k=s}k\,\mu_k(x)l_k(x) + R(x)\sum_{k=0}^{k=s}\mu_k(x)l_k'(x)\right\} \leftarrow l_k'(x) = -\frac{k\,a}{X(x)}l_k(x)$$

$$\Rightarrow \rho_0(x) = \frac{1}{c}\{R(x)\mu_0'(x) - S(x)\mu_0(x)\}$$

L'application de cet algorithme est par exemple applicable à la fonction $g(z) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1\\ \gamma,e_1\end{matrix};z\right)$, puisque nous savons des fonctions généralisées hypergéométrique que :

$$f(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right) \Rightarrow g(z) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1\\ \gamma,e_1\end{matrix};z\right) = \frac{f'(z)}{e_1} + f(z)$$

Plus généralement si l'on construit la fonction g(z) de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x) = {}_{2+r}F_{1+r}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1,\ldots,e_r+1\\ \gamma,e_1,\ldots,e_r\end{matrix};x\right) = \frac{x}{e_r}f'(x) + f(x) \\ f(x) = {}_{2+r-1}F_{1+r-1}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1,\ldots,e_{r-1}+1\\ \gamma,e_1,\ldots,e_{r-1}\end{matrix};x\right) \end{cases}$$

Elle suit parfaitement le schéma algorithmique proposée dans l'article « Some differential equations satisfied by hypergeometric functions », sachant que l'équation différentielle est constamment du second degré.

En l'occurrence l'algorithme a la forme suivante :

$$s=2 \quad L\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{j=0}^{j=2}\mu_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \qquad K\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{j=0}^{j=2}\rho_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \qquad X(x)=\frac{x}{e_r} \qquad c_j=1+\frac{j}{e_r}$$

$$l_j(x)=\frac{(-1)^j}{(X(x))^j}\prod_{k=0}^{k=j-1}c_j \Rightarrow l_0(x)=1 \qquad l_3(x)=-e_r\frac{c_2 l_2(x)}{x}$$

$$R(x)=\sum_{j=0}^{j=s}\mu_j(x)l_j(x) \qquad S(x)=R'(x)-\frac{c}{X(x)}R(x)$$

$$\sigma_j(x)=\mu_{j-1}(x)+\mu_j'(x) \qquad j\in\{0,\ldots,3\} \qquad \sigma_0(x)=\mu_0'(x) \qquad \sigma_3(x)=\mu_2(x)$$

$$\rho_j(x)=\frac{1}{c_l l_j(x)}\left\{S(x)\sum_{k=l}^{k=1}\mu_{k+1}(x)l_{k+1}(x)-R(x)\sum_{k=l}^{k=2}\sigma_{k+1}(x)l_{k+1}(x)\right\}$$

$$\rho_0(x)=R(x)\mu_0'(x)-S(x)\mu_0(x) \qquad \rho_2(x)=e_r\frac{R(x)\mu_2(x)}{x}$$

Comme exemple ils donnent en fin d'article (expressions 3.22 et 3.23) la fonction :

$$g(x)={}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1\\ \gamma,e_1\end{matrix};x\right)$$

qui sous certaines contraintes entre les paramètres α,β,γ,e *satisfait à l'équation de Heun.*

Nous pouvons donc calculer assez facilement l'expression de l'équation différentielle de la fonction g(x) à partir de celle de l'équation différentielle de la fonction f(x), soit $f(x)={}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)$*, en suivant l'algorithme, soit ici :*

$$f(x)={}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)\rightarrow L\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{j=0}^{j=2}\mu_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \qquad \begin{cases}\mu_2(x)=x(x-1)\\ \mu_1(x)=x(\alpha+\beta+1)-\gamma\\ \mu_0(x)=\alpha\,\beta\Rightarrow\mu_0'(x)=0\end{cases}$$

$$l_0(x)=1 \qquad l_1(x)=-\frac{e_1}{x} \qquad l_2(x)=\frac{e_1(e_1+1)}{x^2} \quad c_0=1 \qquad c_1=\frac{e_1+1}{e_1} \qquad c_2=\frac{e_1+2}{e_1}$$

$$R(x)=\frac{x\,(e_1-\alpha)(e_1-\beta)-e_1(e_1+1-\gamma)}{x} \qquad R'(x)=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{x^2}$$

$$S(x)=R'(x)-\frac{e_1}{x}R(x)=e_1\frac{(e_1+1)(e_1+1-\gamma)-x\,(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}{x^2}$$

$$\rho_0(x)=R(x)\mu_0'(x)-S(x)\mu_0(x)=-\alpha\,\beta\,S(x)=\frac{e_1}{x^2}\alpha\,\beta\,\left(x\,(e_1-\alpha)(e_1-\beta)-(e_1+1)(e_1+1-\gamma)\right)$$

$$\rho_2(x)=e_1\frac{R(x)\mu_2(x)}{x}=\frac{e_1(x-1)}{x}\left(x\,(e_1-\alpha)(e_1-\beta)-e_1(e_1+1-\gamma)\right)=\frac{e_1}{x^2}x(x-1)\left(x\,(e_1-\alpha)(e_1-\beta)-e_1(e_1+1-\gamma)\right)$$

$$\rho_1(x)=-\frac{x}{e_1+1}l_2(x)\{S(x)\mu_2(x)-R(x)\sigma_2(x)\}=-\frac{e_1}{x}\{S(x)\mu_2(x)-R(x)\mu_1(x)\}$$

$$=\frac{e_1}{x^2}\left(x^2(e_1-\alpha)(e_1-\beta)(1+\alpha+\beta)+x\left(e_1(1+\alpha+\beta)(2(\gamma-1)-e_1)-\gamma\left(\alpha\,\beta+e_1^{\,2}\right)+\alpha\,\beta\right)+\gamma\,e_1(e_1+1-\gamma)\right)$$

Ainsi les auteurs J.Letessier, G.Valent, J.Wimp prouvent que la fonction $y(z) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,e_1+1\\ \tilde{\gamma}+1,e_1\end{matrix};z\right) \qquad \gamma=\tilde{\gamma}+1$ *respecte l'équation différentielle suivante (formule 3.21, x est changé en z et le tout est multiplié par* x^2/e_1*) :*

$$\begin{aligned}
&z(z-1)\left((\alpha-e_1)(\beta-e_1)\,z+e_1(\tilde{\gamma}-e_1)\right)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\\
&+\left((\alpha-e_1)(\beta-e_1)(\alpha+\beta+1)\,z^2+\left(e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta\right)z+(\tilde{\gamma}+1)\,e_1\,(e_1-\tilde{\gamma})\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+\\
&+\alpha\,\beta\left((\alpha-e_1)(\beta-e_1)\,z+(e_1+1)(\tilde{\gamma}-e_1)\right)y(z)=0\\
&\Leftrightarrow z(z-1)\left(z+\frac{e_1(\tilde{\gamma}-e_1)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\right)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\\
&+\left((\alpha+\beta+1)\,z^2+\frac{\left(e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta\right)z+(\tilde{\gamma}+1)\,e_1\,(e_1-\tilde{\gamma})}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+\\
&+\alpha\,\beta\left(z+\frac{(e_1+1)(\tilde{\gamma}-e_1)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\right)y(z)=0
\end{aligned}$$

Par identification des termes en dérivée seconde, première et fonction avec l'équation différentielle de Heun,

$$\begin{aligned}
&z(z-1)(z-a)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\gamma\,(z-1)(z-a)+\delta\,z\,(z-a)+\varepsilon\,z\,(z-1)\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+(\alpha\,\beta\,z-q)\,y(z)=0\\
&z(z-1)(z-a)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left((\gamma+\delta+\varepsilon)\,z^2-(\gamma(1+a)+\delta\,a+\varepsilon)\,z+\gamma\,a\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+(\alpha\,\beta\,z-q)\,y(z)=0
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&Terme\quad \frac{d^2y(z)}{dz^2}\Rightarrow a=-\frac{e_1(\tilde{\gamma}-e_1)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\\
&Terme\quad y(z)\Rightarrow q=\frac{\alpha\,\beta\,(e_1+1)(e_1-\tilde{\gamma})}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=\frac{\alpha\,\beta\,(e_1+1)(e_1+1-\gamma)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\\
&Terme\quad \frac{dy(z)}{dz}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}(\alpha+\beta+1)\,z^2+\dfrac{\left(e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta\right)z+(\tilde{\gamma}+1)\,e_1\,(e_1-\tilde{\gamma})}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\\ =(\gamma+\delta+\varepsilon)\,z^2-(\gamma(1+t)+\delta+\varepsilon)\,z+\gamma\,a\end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1\\ \gamma\,a=\dfrac{(\tilde{\gamma}+1)\,e_1\,(e_1-\tilde{\gamma})}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=\dfrac{\gamma\,e_1\,(e_1+1-\gamma)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\Rightarrow a=\dfrac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\\ \dfrac{e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=-\gamma(1+a)-\delta\,a-\varepsilon\end{cases}$$

La dernière expression est automatiquement vérifiée à l'aide des expressions précédentes comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=-\gamma(1+a)-\delta\,a-\varepsilon\qquad \varepsilon=-1\\
&Comme\quad 1-\gamma-\frac{e_1(e_1+1-\gamma)(\alpha+\beta+2)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}=1-\gamma-(\alpha+\beta+2)\,a=\frac{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)(1-\gamma)-e_1(e_1+1-\gamma)(\alpha+\beta+2)}{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)}\\
&\Rightarrow e_1(\alpha+\beta+1)(2\tilde{\gamma}-e_1)-(\tilde{\gamma}+1)\left(\alpha\,\beta+e_1^{\;2}\right)+\alpha\,\beta=(\alpha-e_1)(\beta-e_1)(1-\gamma)-e_1(e_1+1-\gamma)(\alpha+\beta+2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Terme\quad e_1^{\;2}\rightarrow-(\tilde{\gamma}+1)-(\alpha+\beta+1)=(1-\gamma)-(\alpha+\beta+2)\Leftrightarrow\tilde{\gamma}+1=\gamma\\ Terme\quad e_1^{\;0}\rightarrow\tilde{\gamma}=\gamma-1\\ Terme\quad e_1^{\;1}\rightarrow 2\tilde{\gamma}(\alpha+\beta+1)=-(1-\gamma)(\alpha+\beta)-(1-\gamma)(\alpha+\beta+2)=2\tilde{\gamma}(\alpha+\beta+1)\end{cases}$$

Il vient donc finalement un résultat assez simple :

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2}+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}\frac{dy(z)}{dz}+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$
$$\varepsilon=-1$$
$$\text{Contrainte de Fuchs}\quad \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1$$
$$a=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}\qquad q=\alpha\ \beta\frac{(e_1+1)(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}=\alpha\ \beta\ a\frac{e_1+1}{e_1}$$

dont la substitution des paramètres données par J.Letessier, G.Valent J.Wimp est la suivante :

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2}+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-\frac{1}{k^2}}\right\}\frac{dy(z)}{dz}+\frac{\alpha\ \beta\ z+\frac{s}{k^2}}{z(z-1)\left(z-\frac{1}{k^2}\right)}y(z)=0$$
$$a=t=\frac{1}{k^2}\quad q=-\frac{s}{k^2}\qquad s=-\alpha\ \beta\frac{e_1+1}{e_1}\qquad \text{Contrainte de Fuchs}\quad \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1$$

C'est exactement la formule de factorisation de l'opérateur différentiel de la fonction 3F2 (avec les paramètres de J.Letessier, G.Valent J.Wimp) donnée par K.Takemura (formules 1.9 et 1.10, attention une erreur de signe sur le paramètre q), sous la forme :

$$\widetilde{L}_{\alpha,\beta,\gamma,e_1}=\frac{d^2}{dz^2}+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}\frac{d}{dz}+\frac{\alpha\ \beta\ z-q}{z(z-1)(z-a)}\leftarrow \text{Opérateur différentiel de Heun}$$
$$\varepsilon=-1\quad \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1\Leftrightarrow\gamma+\delta=\alpha+\beta+2$$
$$a=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}\qquad q=\alpha\ \beta\frac{(e_1+1)(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}=\alpha\ \beta\ a\frac{e_1+1}{e_1}\Leftrightarrow e_1+1=\frac{q-(1+\alpha)(1+\beta)+\gamma}{1-a}\qquad a=\frac{q}{\alpha\ \beta}\frac{e_1}{e_1+1}$$
$$\text{Factorisation}\quad L_{\alpha,\beta,e_1+1,\gamma,e_1}=\left\{\frac{d}{dz}+\frac{e_1+1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-a}\right\}\widetilde{L}_{\alpha,\beta,\gamma,e_1}$$

C'est aussi la même formulation donnée par T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan en formules 33, 34 et 35 dans laquelle on peut également interpréter la valeur caractéristique q de l'équation de Heun comme étant racines d'une équation polynomiale du second degré (formule 32) :

$$q=\alpha\ \beta\ a\frac{e_1+1}{e_1}\qquad a=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}\qquad\Rightarrow e_1=\frac{a\ \alpha\ \beta}{q-a\ \alpha\ \beta}$$

$$\begin{cases}\delta=\alpha+\beta+2-\gamma\\ e_1=\dfrac{a\ \alpha\ \beta}{q-a\ \alpha\ \beta}\\ a=\dfrac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)}\end{cases}\Rightarrow(q-a\ \alpha\ \beta+t(1-\delta))(q-a\ \alpha\ \beta+(t-1)(1-\gamma))-a(1-a)(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)=0$$

Si l'on observe bien, il s'agit de la même équation du second degré obtenue pour les solutions d'Ishkhanyan de type (II.3), avec N=1 et en substituant t<->a :

$$\delta=\alpha+\beta+2-\gamma$$
$$q\quad \text{racine de}\quad q^2+q(\alpha-1-a(\delta-2+\gamma(2\delta-3)))+a\ \gamma(\delta-2)(-\alpha+a(\delta-1)(1+\gamma))=0$$

Autrement dit les solutions de type (II.3) exposées par T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan ne serait ni plus ni moins que des solutions particulières de l'équation de Heun déjà observées auparavant, sous la forme de fonctions généralisées hypergéométriques, tout du moins pour les cas N=0 et N=1.

L'identification des solutions d'Ishkhanyan de type (II.3) avec les fonctions généralisées hypergéométriques correspondantes est facile avec N=0 et N=1. Puisque pour chacune de ces solutions il s'agit des développements de Fröbenius d'indice 0 autour de la singularité z=0. Les deux solutions coïncident donc à une constante multiplicative près.

Pour N=0, la correspondance est immédiate, pour N=1, on écrira la correspondance avec diverses relations entre les paramètres :

$$\varepsilon=-1 \qquad \begin{cases} y(z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+\dfrac{q-a\,\alpha\,\beta+a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-1)}\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) \\ y(0)=1+\dfrac{q-a\,\alpha\,\beta+a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-1)} \end{cases}$$

$$q \text{ racine de } \quad q^2-q\,(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta))+a\,\alpha\,\beta((1+\alpha)(1+\beta)-\gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow (q-a\,\alpha\,\beta+a(1-\delta))(q-a\,\alpha\,\beta+(a-1)(1-\gamma))-a(1-a)(1+\alpha-\gamma)(1+\beta-\gamma)=0$$

$$\frac{y(z)}{y(0)}={}_3F_2(\alpha,\beta,e_1+1\,;\gamma,e_1\,;z)$$

$$e_1=\frac{a\,\alpha\,\beta}{q-a\,\alpha\,\beta} \qquad q=\alpha\,\beta\,a\,\frac{e_1+1}{e_1} \qquad a=\frac{e_1(e_1+1-\gamma)}{(e_1-\alpha)(e_1-\beta)} \qquad e_1+1=\frac{q-(1+\alpha)(1+\beta)+\gamma}{1-a}$$

<u>Qu'en est-il maintenant pour N=2 ?</u>

Je peux utiliser une méthode similaire à celle employée dans l'article « Some differential equations satisfied by hypergeometric functions » de J.Letessier, G.Valent, J.Wimp, soit calculer l'équation différentielle du second degré de la fonction hypergéométrique ${}_4F_3(\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1\,;\gamma,e_1,e_2\,;z)$*, à l'aide de l'algorithme exposé par les auteurs, puis d'en déduire les relations entre les divers paramètres par identification avec les termes de l'équation de Heun. Toutefois pour l'instant je laisse de côté cette méthode car le calcul de l'équation différentielle du second degré est suffisamment complexe (même réalisé avec Mathematica).*

Je préfère la méthode de T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan, consistant à partir des termes du développement de la fonction généralisée hypergéométrique ${}_4F_3(\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1\,;\gamma,e_1,e_2\,;z)$ *qui suivent une récurrence à deux termes et de les identifier à la récurrence à trois termes du développement classique de Fröbenius autour de z=0.*

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}c_j\,z^n \qquad \begin{cases} A_j=(j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ B_j=-j\,(j\,(a+1)+\varepsilon\,(1-a)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1) \\ C_j=a\,(j+1)(\gamma+j) \end{cases} \qquad \varepsilon=-N\Rightarrow \begin{cases} A_j=(j-1+\alpha)(j-1+\beta) \\ B_j=-j\,(j\,(1+a)+(a-1)\,N+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)-q \\ C_j=a\,(j+1)(\gamma+j) \end{cases}$$

$$A_jc_{j-1}+B_j\,c_j+C_jc_{j+1}=0$$

Nous savons par ailleurs que par identification de la solution, le développement de Fröbenius autour de z=0 est également la solution du développement d'Ishkhanyan de type (II.3) à une constante multiplicative près.

Comme les termes du développement de la fonction hypergéométrique ${}_4F_3(\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1;\gamma,e_1,e_2;z)$ *suivant la récurrence à deux termes suivantes :*

$$c_j=\frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+j)}\frac{(e_1+j)(e_2+j)}{e_1e_2}\frac{1}{j!}\Rightarrow h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{1}{j}\times\frac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\frac{(e_1+j)(e_2+j)}{(e_1+j-1)(e_2+j-1)}$$

En injectant dans la récurrence de Frobenius autour de z=0 d'indice 0, il vient :

$$N=2\Rightarrow\begin{cases}A_j=(\alpha+j-1)(\beta+j-1)\\B_j=-j\,(j\,(1+a)+2\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)-q\\C_j=a\,(j+1)(\gamma+j)\end{cases}\Rightarrow\frac{A_j}{h_j}+B_j+C_jh_{j+1}=0$$

$$\Leftrightarrow A_j j\times\frac{(\gamma+j-1)}{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}\times\frac{(e_1+j-1)(e_2+j-1)}{(e_1+j)(e_2+j)}+B_j+C_j\frac{1}{j+1}\times\frac{(\alpha+j)(\beta+j)}{(\gamma+j)}\times\frac{(e_1+j+1)(e_2+j+1)}{(e_1+j)(e_2+j)}=0$$

$$\Leftrightarrow j\times(\gamma+j-1)\times(e_1+j-1)(e_2+j-1)+B_j(e_1+j)(e_2+j)+a\times(\alpha+j)(\beta+j)\times(e_1+j+1)(e_2+j+1)=0$$

$$\Leftrightarrow j\,(\gamma+j-1)\times(e_1+j-1)(e_2+j-1)+B_j(e_1+j)(e_2+j)+a\,(\alpha+j)(\beta+j)\times(e_1+j+1)(e_2+j+1)=0$$

$$Terme\ en\ j^4\rightarrow1-(1+a)-a=0$$

$$Terme\ en\ j^3\rightarrow-3+e_1+e_2+\gamma+3-e_1-e_2-a(2+e_1+e_2+\alpha+\beta)-\gamma+a(2+e_1+e_2+\alpha+\beta)=0$$

C'est une équation sur l'indice j à l'ordre 2, en effet le terme en j^4 *et le terme en* j^3 *s'annule directement.*

Il reste donc un système de 3 équations algébriques sur les paramètres a, q, α, β, γ, e1 et e2. La première équation algébrique correspondant à l'annulation du terme de degré 0 en puissance de j donne la valeur :

$$q = a\,\alpha\,\beta\,\frac{(e_1+1)(e_2+1)}{e_1 e_2}$$

La deuxième équation algébrique correspondant à l'annulation du terme de degré 1 en puissance de j, donne la valeur :

$$a = e_1 e_2\,\frac{2\,e_1 e_2 + (\gamma-1)(1-e_1-e_2)}{\alpha\,\beta\,(e_1(1+e_1)+e_2(1+e_1)) + e_1 e_2(2\,e_1 e_2 - (\alpha+\beta)(1+e_1+e_2))}$$

La troisième équation algébrique correspondant à l'annulation du terme de degré 2 en puissance de j, donne la valeur :

$$a = e_1 e_2\,\frac{3+e_1+e_2-2\gamma}{\alpha\,\beta\,(1+e_1+e_2) + e_1 e_2(e_1+e_2-1-2(\alpha+\beta))}$$

Toutes ces expressions sont à comparer avec celles données en formules (40) et (41) dans l'article « Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two-Term Recurrence » des auteurs T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan. L'expression de a est différente, mais cela n'indique pas pour autant qu'elle soit fausse.

Il semble donc y avoir surabondance de solutions pour le paramètre a. Qu'en est-il en réalité ?

Toutes ces expressions sont intéressantes en ceci qu'elles permettent de définir les paramètre a et q en fonction de la somme e_1+e_2 et du produit e_1e_2, comme ceci :

$$s_{12} = e_1+e_2 \quad p_{12} = e_1 e_2 \Rightarrow \begin{cases} q = a\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+p_{12}+s_{12}}{s_{12}} \\ a = p_{12}\,\dfrac{3+s_{12}-2\gamma}{\alpha\,\beta\,(1+s_{12}) + p_{12}(s_{12}-1-2(\alpha+\beta))} \\ a = p_{12}\,\dfrac{2\,p_{12}+(\gamma-1)(1-s_{12})}{\alpha\,\beta\,(s_{12}(1+s_{12})-2\,p_{12}) + p_{12}(2\,p_{12}-(\alpha+\beta)(1+s_{12}))} \end{cases}$$

Les deux premières équations s'inversent facilement pour donner :

$$s_{12} = \frac{3+a-q+a\,(\alpha\,\beta+2\,(\alpha+\beta))}{a-1} \qquad p_{12} = a\,\alpha\,\beta\,\frac{2+a\,(\alpha\,\beta+2\,(1+\alpha+\beta))-2\gamma-q}{(a-1)(q-a\,\alpha\,\beta)}$$

L'injection de ces deux expressions dans la troisième expression permet de factoriser le polynôme en q suivant :

$$P_2(q)=\left((q-a\,\alpha\,\beta)^2+(q-a\,\alpha\,\beta)(4a-a\,(3+\alpha+\beta)-2+\gamma)+2\,a\,(a-1)\alpha\,\beta\right)\left(q-a\,\alpha\,\beta-2a\,(1+\alpha+\beta)-2+2\gamma\right)+2\,a\,(a-1)(q-a\,\alpha\,\beta)(1+\alpha)(1+\beta)$$

Ce qui est exactement le polynôme dont q doit être la racine pour assurer une développement de type (III.2) fini. Cela signifie que la troisième équation algébrique est automatiquement vérifiée par la factorisation de ce polynôme. L'expression (41) de a :

$$a=e_1e_2\,\frac{2\,e_1e_2+(2-\gamma)(1+e_1+e_2)}{\alpha\,\beta\left((1+e_1)^2+(1+e_2)^2-1\right)+e_1e_2\left(2\,e_1e_2-4-(3+e_1+e_2)(\alpha+\beta-1)\right)}$$

donnée par T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan est différente mais en l'injectant également comme autre équation on factorise encore le polynôme $P_2(q)$. Cette expression est donc juste.

Poussons toujours plus loin (vers l'infini et au delà ...) avec N=3. Pour la détermination de la fonction généralisée hypergéométrique suivante : $y(z)={}_5F_4(\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1,e_3+1\,;\gamma,e_1,e_2,e_3\,;z)$, dans la récurrence de Fröbenius d'indice 0 autour de z=0, il vient l'identification suivante :

$$h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{1}{j}\times\frac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\frac{(e_1+j)(e_2+j)(e_3+j)}{(e_1+j-1)(e_2+j-1)(e_3+j-1)}$$

$$N=3\quad et\quad\begin{cases}A_j=(\alpha+j-1)(\beta+j-1)\\ B_j=-j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)-q\\ C_j=a\,(j+1)(\gamma+j)\end{cases}\Rightarrow\frac{A_j}{h_j}+B_j+C_jh_{j+1}=0$$

On obtient une équation algébrique de degré N=3 en j, qui par annulation de chaque terme de puissance de j donne un système de N+1=4 équations algébriques, dont celle de puissance 0 (la première équation) donne invariablement l'expression :

$$q=a\,\alpha\,\beta\,\frac{(e_1+1)(e_2+1)(e_3+1)}{e_1e_2e_3}$$

Toutes les autres équations algébriques donnent une détermination de a en fonction des paramètres e_1,e_2,e_3 sous la forme $a=f_j(e_1,e_2,e_3)\quad j=1,\ldots,N=3$. Ces N=3 équations permettent en théorie de déterminer les trois paramètres e_1,e_2,e_3 en fonction des paramètres a,q,α,β,γ, N=3. Il faut plus précisément tenir compte de la remarque suivante :

Remarque importante : étant donnée que la donnée des paramètres e_1,e_2 et e_3 est indifférente à la permutation quelconque de ces trois paramètres, il s'ensuit que chaque expression de a est également fonction des paramètres symétriques s_1,s_2 et s_3 suivant :

$$\begin{cases}s_1=e_1+e_2+e_3\\ s_2=e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3\\ s_3=e_1e_2e_3\end{cases}$$

On obtient alors un système d'équations algébriques sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} q = a\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+s_1+s_2+s_3}{s_3} \\[2mm] a = \dfrac{s_3\left(6+s_1-3\gamma\right)}{s_3 s_1+\alpha\,\beta\,\left(1+s_1+s_2\right)-3\,s_3\left(1+\alpha+\beta\right)} \\[2mm] a = \dfrac{s_3\left(1-s_1+s_2+3\,s_3-\gamma\,\left(1-s_1+s_2\right)\right)}{3\,s_3^{\;2}-s_3\left(\alpha+\beta\right)\left(1+s_1+s_2\right)+\alpha\,\beta\,\left(s_2+s_1 s_2+s_2^{\;2}-3\,s_3-2\,s_1 s_3\right)} \end{array}\right.$$

$$a = \frac{s_3\left(3\,s_1+2\,s_2-4-\gamma\,\left(2s_1-3\right)\right)}{s_3\left(2s_2-s_1-1-\left(\alpha+\beta\right)\left(2s_1+3\right)\right)+\alpha\,\beta\,\left(s_1+s_1 s_2+s_1^{\;2}-3\,s_3\right)}$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir les expressions de s_1,s_2,s_3 suivantes :

$$s_1 = \frac{6-q+3\,a\,\left(1+\alpha+\beta\right)+a\,\alpha\,\beta-3\,\gamma}{a-1}$$

$$s_2 = \frac{1}{a-1}\,\frac{\left\{\begin{array}{l} q^2\left(1-a\,\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)-\gamma\right)+ \\ +q\,\left(-7+\mathrm{a}^2\left(\beta\,\left(4+3\beta\right)+\alpha^2\left(3+8\beta+4\beta^2\right)+2\,\alpha\,\left(2+9\beta+4\beta^2\right)\right)+10\,\gamma-3\,\gamma^2+2\,\mathrm{a}\,\left(-1+\alpha+\beta-2\,\alpha\,\beta\,\left(-1+\gamma\right)+\gamma\right)\right)- \\ -a\,\alpha\,\beta\,\left(-22+\mathrm{a}^2\left(12+13\beta+3\beta^2+\alpha^2\left(3+7\beta+2\beta^2\right)+\alpha\,\left(13+18\beta+7\beta^2\right)\right)+19\,\gamma-3\,\gamma^2-\mathrm{a}\,\left(-1+7\beta+\alpha\,\left(7+5\beta\,\left(-1+\gamma\right)\right)+7\gamma\right)\right) \end{array}\right\}}{q^2+a\,\alpha\,\beta\,\left(a\,\left(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta\right)-2-\gamma\right)-q\left(1+a\,\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)-\gamma\right)}$$

$$s_3 = \frac{a\,\alpha\,\beta}{a-1}\,\frac{2+a\,\left(\alpha\,\beta+2\,\left(1+\alpha+\beta\right)\right)-2\,\gamma-q}{q^2+a\,\alpha\,\beta\,\left(a\,\left(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta\right)-2-\gamma\right)-q\left(1+a\,\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)-\gamma\right)}$$

La quatrième équation est en surabondance pour la détermination de s_1,s_2,s_3 en fonction de q et a, mais elle est automatiquement vérifiée grâce à la factorisation du polynôme $P_3(q)$ dont q est la racine. Le polynôme $P_3(q)$ du développement d'Ishkhanyan de type (II.3) est le suivant :

$$P_3(q) = \left\{\begin{array}{l} q^4-2\,q^3\left(5+a\,\left(2+3\,\left(\alpha+\beta\right)+2\,\alpha\,\beta\right)-3\,\gamma\right)+ \\ +q^2\left(\begin{array}{l} \mathrm{a}^2\left(4+18\,\beta+11\,\beta^2+\alpha^2\left(11+18\,\beta+6\,\beta^2\right)+2\,\alpha\,\left(9+22\,\beta+9\,\beta^2\right)\right)- \\ -2\,\mathrm{a}\,\left(-6-15\,\beta+4\,\gamma+11\,\beta\,\gamma+\alpha\,\left(-15-10\beta+11\gamma+9\beta\gamma\right)\right)+ \\ +33-40\,\gamma+11\,\gamma^2 \end{array}\right)+ \\ +2\,q\left(\begin{array}{l} \mathrm{a}^3\left(3\beta\,\left(2+3\beta+\beta^2\right)+\alpha^3\left(3+11\beta+9\beta^2+2\beta^3\right)+\alpha^2\left(9+42\beta+38\beta^2+9\beta^3\right)+\alpha\,\left(6+40\beta+42\beta^2+11\beta^3\right)\right)+ \\ +\mathrm{a}^2\left(\alpha\,\left(9+\beta\,\left(33-41\gamma\right)+\beta^2\left(15-22\gamma\right)-9\,\gamma\right)+\alpha^2\left(9+\beta\,\left(15-22\,\gamma\right)+\beta^2\left(5-9\,\gamma\right)-9\,\gamma\right)-9\beta\,\left(1+\beta\right)\left(-1+\gamma\right)-3\,\left(-6+11\,\gamma-6\,\gamma^2+\gamma^3\right)\right)+ \\ +\mathrm{a}\,\left(9\left(\alpha+\beta\right)\left(2-3\gamma+\gamma^2\right)+\alpha\,\beta\,\left(12-25\,\gamma+11\,\gamma^2\right)\right) \end{array}\right)+ \\ +a\,\alpha\,\beta\left(\begin{array}{l} \mathrm{a}^3\left(6+11\,\alpha+6\alpha^2+\alpha^3\right)\left(6+11\beta+6\beta^2+\beta^3\right)- \\ -2\mathrm{a}^2\left(18+9\,\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(27+11\,\alpha\beta\right)\left(\alpha+\beta\right)+37\,\alpha\,\beta+3\,\alpha^2\beta^2\right)\gamma+ \\ +\mathrm{a}\gamma\,\left(18\,\left(1+\alpha+\beta\right)\left(\gamma-1\right)+\alpha\,\beta\,\left(11\,\gamma-10\right)\right)- \\ -6\,\gamma\,\left(2-3\gamma+\gamma^2\right) \end{array}\right) \end{array}\right\}$$

Par extension pour n'importe quelle valeur de N, il vient l'algorithme suivant de construction des paramètres de la fonction généralisée hypergéométrique : $y(z)={}_{N+2}F_{N+1}(\alpha,\beta,e_1+1,...,e_N+1\,;\gamma,e_1,...,e_N\,;z)$ *solution de l'équation de Heun :*

$$h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{1}{j}\times\frac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}$$

$$\begin{cases}A_j=(\alpha+j-1)(\beta+j-1)\\ B_j=-j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)-q\Rightarrow\dfrac{A_j}{h_j}+B_j+C_jh_{j+1}=0\\ C_j=a\,(j+1)(\gamma+j)\end{cases}$$

On obtient une équation algébrique de degré N en j, qui par annulation de chaque terme de puissance de j donne un système de N+1 équations algébriques, dont celle de puissance 0 donne invariablement l'expression : $q=a\,\alpha\,\beta\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+1)}{\prod_{l=1}^{l=N}e_l}$*. Toutes les autres équations algébriques 2 à N donnent une détermination de a en fonction des paramètres* $s_1,s_2,...,s_N$ *sous la forme* $a=f_j(s_1,s_2,...,s_N)\quad j=1,...,N$.
En effet toutes les équations algébriques obtenues sont parfaitement symétriques à toute permutation des paramètres e_1,e_2 *, …,* e_N*, il s'ensuit que chaque équation est fonction des paramètres symétriques :*

$$\begin{cases}s_0=1\qquad s_1=\sum_{l=1}^{l=N}e_l\qquad s_2=\sum_{i,j=1,i>j}^{i,j=N}e_ie_j\qquad s_3=\sum_{i,j,k=1,i>j>k}^{i,j=N}e_ie_je_k\\ \ldots\\ s_{N-1}=\sum_{i_1,\ldots,i_N=1,i_1>\ldots>i_{N-1}}^{i_1,\ldots,i_N}e_{i_1}\times\ldots\times e_{i_{N-1}}\qquad s_N=\prod_{l=1}^{l=N}e_l\end{cases}$$

L'introduction des paramètres symétriques s_1,s_2 *, …,* s_N *permet de linéariser le système initial d'équations algébriques. En effet les produits symétriques contenus dans les coefficients* h_j *deviennent des sommes :*

$$\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l\qquad\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,(j-1)^l\Rightarrow\begin{cases}h_j=\dfrac{1}{j}\times\dfrac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}=\dfrac{1}{j}\times\dfrac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\dfrac{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,(j-1)^l}\\ h_{j+1}=\dfrac{(\alpha+j)(\beta+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,(j+1)^l}{(j+1)(\gamma+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l}\end{cases}$$

D'où une équation algébrique de degré N+2 en j :

$$\frac{j\,(\gamma+j-1)\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}-j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)-q+a\,\frac{(\alpha+j)(\beta+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}=0$$

$$\Leftrightarrow j\,(\gamma+j-1)\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l-(j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)+q)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(\alpha+j)(\beta+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

On vérifie aisément que le degré N+2 et N+1 de cette équation algébrique s'annulent :

$$j\,(\gamma+j-1)\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l-(j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)+q)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(\alpha+j)(\beta+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

$$Terme\quad j^{N+2}=s_0-(1+a)\,s_0+a\,s_0=0$$

$$\begin{cases}Terme\quad j^{N+1}=s_1-s_0+s_0(1-N)+s_0(\gamma-1)-((1+a)\,s_1+s_0(N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1))+a\,(s_1+s_0+s_0(N-1+\alpha+\beta))\\ =s_1-(1+a)\,s_1+a\,s_1=0\end{cases}$$

L'équation algébrique en j est donc en réalité bien une équation de degré N en j. L'annulation de tous les termes de puissance de j aboutit immanquablement à un système de N+1 équations linéaires dans les variables s_1,s_2 , …, s_N . Les N premières équations servent à déterminer s_1,s_2 , …, s_N en fonction des paramètres a,q,α,β,γ,N : $s_j=g_j(\alpha,\beta,\gamma,a,q,N)\quad j=1,\ldots,N$. La N+1 équation linéaire détermine également une valeur $a=f_N(s_1,s_2,\ldots,s_N)$. Si dans cette dernière expression on injecte les valeurs $s_j=g_j(\alpha,\beta,\gamma,a,q,N)\quad j=1,\ldots,N$, alors on parvient à factoriser le polynôme caractéristique du développement d'Ishkhanyan de type (II.3). Cela permet de vérifier que la N+1ème équation algébrique est automatiquement vérifiée par la condition que q est racine du polynôme caractéristique.

L'équation algébrique en j de degré N+2, par l'annulation des N+1 premiers termes donne donc une système linéaire à N inconnus $(s_1,s_2,\ldots,s_N)$, si on le développe formellement comme un système à N+1 inconnus $(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_N)$, comme suit :

$$P_N(j)=j\,(\gamma+j-1)\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l-(j\,(j\,(1+a)+N\,(a-1)+a\,(\alpha+\beta)+\gamma-1)+q)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(\alpha+j)(\beta+j)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l$$

$$P_N(j)=\sum_{l=0}^{l=N}E_j j^l\qquad E_j=\sum_{l=0}^{l=N}e_{j,l}\,s_l\Rightarrow P_N(j)=0\Leftrightarrow[e_{j,l}].[s_l]=0$$

Le système linéaire devient homogène et dans ces conditions les conditions pour une solution non-triviale, il convient d'annuler le déterminant de la matrice : $Det(|e_{j,l}|)=0$.

Le polynôme d'ordre N+1 en q peut être déterminé de deux façons, soit par l'annulation du déterminant suivant :

$$\begin{cases}A_j^{(II.3)}=\dfrac{a\,(\alpha-\gamma+N-j+1)(\beta-\gamma+N-j+1)(N-j+1)}{\gamma-N+j-1}\\ B_j^{(II.3)}=a\,\alpha\,\beta+j\,(a-1)(\gamma-N+j-1)+a\,(N-j)(\alpha+\beta-\gamma+N-j)\\ C_j^{(II.3)}=-(a-1)(\gamma-N+j)(j+1)\end{cases}\qquad Det\left(\begin{bmatrix}B_0^{(II.3)}-q & C_0^{(II.3)} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ A_1^{(II.3)} & B_1^{(II.3)}-q & C_1^{(II.3)} & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & A_2^{(II.3)} & B_2^{(II.3)}-q & C_2^{(II.3)} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & A_{N-1}^{(II.3)} & B_{N-1}^{(II.3)}-q & C_{N-1}^{(II.3)}\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & A_N^{(II.3)} & B_N^{(II.3)}-q\end{bmatrix}\right)=0$$

L'autre moyen de produire ce polynôme vient d'être évoqué par l'annulation du déterminant suivant :

$$P_N(j) = j\,(\gamma + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l - (j\,(j\,(1+a) + N\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) + q) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + a\,(\alpha + j)(\beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l$$

$$P_N(j) = \sum_{l=0}^{l=N} E_j\, j^l \qquad E_j = \sum_{l=0}^{l=N} e_{j,l}\, s_l \Rightarrow P_N(j) = 0 \Leftrightarrow [e_{j,l}].[s_l] = 0$$

$$Det\,([e_{j,l}]) = 0$$

Remarque : en repartant de la récurrence originale sans poser $\varepsilon = -N$

$$\begin{cases} A_j = (j - 1 + \alpha)(j - 1 + \beta) \\ B_j = -j\,(j\,(a+1) + \varepsilon\,(1-a) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) \\ C_j = a\,(j+1)(\gamma + j) \end{cases}$$

Alors l'équation algébrique de degré N+2 en j s'écrit :

$$j\,(\gamma + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l - (j\,(j\,(1+a) - \varepsilon\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) + q) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + a\,(\alpha + j)(\beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

Et c'est l'annulation du terme en N+1 qui permet de déduire la contrainte : $\varepsilon = -N$

$$j\,(\gamma + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l - (j\,(j\,(1+a) - \varepsilon\,\ (a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) + q) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + a\,(\alpha + j)(\beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

$$Terme \quad j^{N+2} = s_0 - (1+a)\, s_0 + a\, s_0 = 0$$

$$\begin{cases} Terme \quad j^{N+1} = s_1 - s_0 + s_0(1-N) + s_0(\gamma - 1) - ((1+a)\, s_1 + s_0(-\varepsilon\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1)) + a\,(s_1 + s_0 + s_0(N - 1 + \alpha + \beta)) \\ = s_1 - (1+a)\, s_1 + a\, s_1 + s_0(N+\varepsilon)\,(a-1) = s_0(N+\varepsilon)\,(a-1) = 0 \Rightarrow \varepsilon = -N \end{cases}$$

Il reste une toute petite étape qui consiste à revenir des produits symétriques aux variables e_i *. Il suffit pour cela d'utiliser la formule du polynôme de Vieta :*

$$s_0 = 1\,,\, s_j \quad j = 1,\ldots,N \rightarrow Vieta(t,N) = \sum_{j=0}^{j=N} s_{N-j}(-1)^{N-j}\, t^j = \prod_{j=1}^{j=N}(t - e_j)$$

Par un programme numérique, il suffit donc de rechercher les N racines du polynôme de Vieta, calculé à partir des valeurs s_i *pour obtenir toutes les N valeurs des variables* e_i *.*

A titre d'exemple voici des valeurs particulières des paramètres :

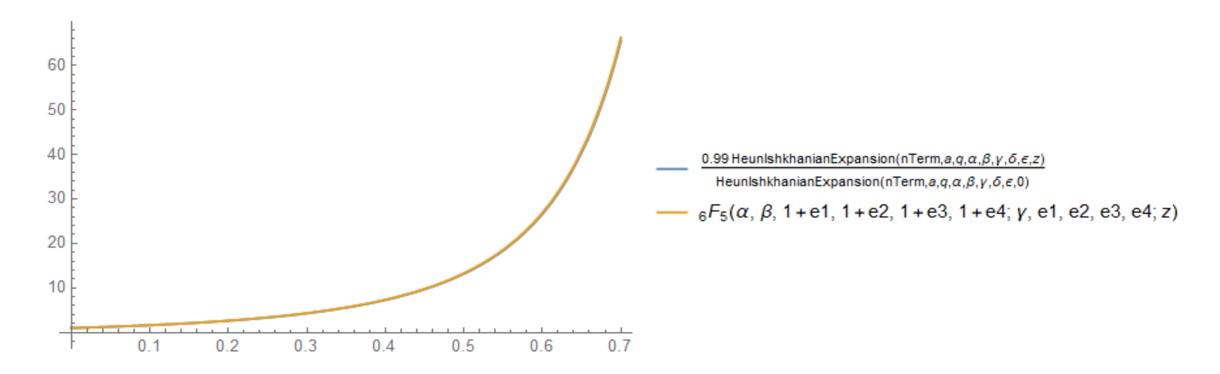
$$a=\frac{6}{5}\quad \alpha=\frac{7}{8}\quad \beta=\frac{3}{4}\quad \gamma=\frac{7}{13}\quad \varepsilon=-N=-4$$

$$P_5(q)=\mathrm{q}^5-\frac{10411}{208}\mathrm{q}^4+\frac{453403221}{540800}\mathrm{q}^3-\frac{125887503663}{22497280}\mathrm{q}^2+\frac{16255094857393221}{1169858560000}\mathrm{q}-\frac{176651269997811147}{18717736960000}$$

$$P_5(q)=0\Leftrightarrow q=\{23.3539\,,14.4862\,,7.81156\,,3.32818\,,1.07301\}$$

$$Pour\quad q=3.32818\rightarrow\begin{cases}s_1=101.527\\ s_2=2898.81\\ s_3=22872.9\\ s_4=8019.87\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{e}_1=58.8103\\ \mathrm{e}_2=29.9684\\ \mathrm{e}_3=12.3811\\ \mathrm{e}_4=0.367528\end{cases}$$

Et les graphes respectifs des fonctions construites coïncident parfaitement :



Il se peut que les paramètres e_j, racines du polynôme de Vieta, soient parfois complexes. Dans ce cas, le conjugué complexe $\overline{e_j}$ est également une racine du polynôme de Vieta. Dans ces conditions la fonction généralisée hypergéométrique reste à valeur réelle. Partant de la définition de la fonction généralisée hypergéométrique, et considérant par exemple e1 et e2 comme les racines complexes conjuguées, il vient :

$$y(z)={}_{2+N}F_{1+N}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2,\ldots,1+e_N\\ \gamma,e_1,e_2,\ldots,e_N\end{matrix};z\right)=\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{\Gamma(\alpha+l)\Gamma(\beta+l)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+l)}\times\prod_{j=1}^{j=N}\left(\frac{\Gamma(1+e_j+l)}{\Gamma(1+e_j)}\times\frac{\Gamma(e_j)}{\Gamma(e_j+l)}\right)\times\frac{z^l}{l!}$$

$${}_{2+N}F_{1+N}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,1+e_1,1+\overline{e_1},\ldots,1+e_N\\ \gamma,e_1,\overline{e_1},\ldots,e_N\end{matrix};z\right)=\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{\Gamma(\alpha+l)\Gamma(\beta+l)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+l)}\times\frac{\Gamma(1+e_1+l)\Gamma(1+\overline{e_1}+l)}{\Gamma(1+e_1)\Gamma(1+\overline{e_1})}\times\frac{\Gamma(e_1)\Gamma(\overline{e_1})}{\Gamma(e_1+l)\Gamma(\overline{e_1}+l)}\times\prod_{j=3}^{j=N}\left(\frac{\Gamma(1+e_j+l)}{\Gamma(1+e_j)}\times\frac{\Gamma(e_j)}{\Gamma(e_j+l)}\right)\times\frac{z^l}{l!}$$

$$Comme\quad \Gamma(1+\overline{e_1}+l)=\overline{\Gamma(1+e_1+l)}\quad \ldots\Rightarrow{}_{2+N}F_{1+N}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,1+e_1,1+\overline{e_1},\ldots,1+e_N\\ \gamma,e_1,\overline{e_1},\ldots,e_N\end{matrix};z\right)\quad \text{à valeur réelle}$$

L'existence d'un tel résultat n'est donc plus une conjecture puisque le système d'équations a été linéarisé. L'algorithme est applicable sous Mathematica et donne toute satisfaction, seulement limité par le temps de calcul (qui s'avère négligeable au final, si le problème est totalement linéarisé).

<u>Déduction des solutions pour ε entier positif</u>

Un article de 2020 du même auteur A.M.Ishkhanyan « Generalized hypergeometric solutions of the Heun equation » apporte un complément de deux natures. Tout d'abord en plus de l'article de 2018 des auteurs «Gauss-hypergeometric expansions of the general Heun functions governed by two-term recurrence relations » dont on a déjà parlé, A.M.Ishkhanyan introduit les produits symétriques s_i et permet donc la linéarisation du système d'équations algébriques et donc la solution complète telle qu'on a pu le voir.

Ensuite il traite le cas des ε entiers positifs en page 6 et 7. Pour cela rappelons une des transformation homotopique de l'équation de Heun qui permet de « renverser » le signe du paramètre ε :

$$y(z) = (z-a)^{1-\varepsilon} y_{III}(z) \Rightarrow y_{III}(z) = HeunG_l\left(a, q+\gamma(1-\varepsilon); \alpha+1-\varepsilon, \beta+1-\varepsilon, \gamma, \delta, 2-\varepsilon ; z\right)$$

Alors le schéma de construction est le suivant :

$$\begin{cases} Jeux\ de\ paramètres \\ \alpha+1-\varepsilon\ ,\ \beta+1-\varepsilon\ ,\ \gamma\ ,\ \delta\ ,\ 2-\varepsilon = -N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Racine\quad q_{III}\quad et\quad e_1,\ldots,e_N \\ y_{III}(z) = {}_{N+2}F_{N+1}\left(\alpha+1-\varepsilon, \beta+1-\varepsilon, e_1+1,\ldots,e_N+1; \gamma, e_1,\ldots,e_N ; z\right) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y(z) = (z-a)^{-1-N}\ {}_{N+2}F_{N+1}\left(\alpha-1-N, \beta-1-N, e_1+1,\ldots,e_N+1; \gamma, e_1,\ldots,e_N ; z\right) \\ Solution\ de\ l'équation\ de\ Heun\ avec\quad q = q_{III}+\gamma(1+N)\quad et\quad \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ ,\ \delta\quad et\quad \varepsilon = N+2\quad N \geq 0 \end{cases}$$

Propriété supplémentaire du développement d'Ishkhanyan de type (II.3) : la singularité « apparente », disparition du terme logarithmique du développement de Fröbenius autour du point singulier régulier z=a

Un classique résultat de la théorie des équations différentielles ordinaires de degré quelconque stipule que lorsque l'équation indicielle du développement de Fröbenius autour d'une singularité régulière z_0 donne deux racines dont l'écart est un entier alors la seconde solution indépendante autour de la singularité z_0 comporte un terme logarithmique. Il existe des conditions biens spécifiques pour que ce terme logarithmique disparaisse. Lorsque ces conditions sont remplies on dit alors que la singularité autour du point régulier z_0 est « apparente ».

Pour le cas de l'équation de Heun je m'en réfère pour partie au formalisme de la théorie de Fröbenius (exposé dans et pour partie à des considérations spécifiques portant sur les développements de Fröbenius. Plus précisément considérons l'équation de Heun et les diverses exposants de l'équation indicielle :

$$\begin{array}{l}
y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z)+\frac{\alpha\beta\, z-q}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0\\
\text{Condition de Fuchs}\quad \gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1\\
\text{Point singulier } z=0\quad p_0=\gamma\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\gamma-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\gamma\\
\text{Point singulier } z=1\quad p_0=\delta\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\delta-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\delta\\
\text{Point singulier } z=a\quad p_0=\varepsilon\quad q_0=0\Rightarrow I(r)=r^2+r(\varepsilon-1)\Rightarrow r=0\quad r=1-\varepsilon\\
\text{Point singulier } z=\infty\Rightarrow r^2+r(1-p_0)+q_0=(r-\alpha)(r-\beta)=0\Rightarrow r=\alpha\quad r=\beta
\end{array}$$

Et regardons spécifiquement la condition pour laquelle le terme logarithmique sera absent, pour un développement autour du point singulier z=a,. Étant donné qu'autour de la singularité z=a l'écart en valeur absolue entre les deux racines indicielle est de |1-ε|, il suffit que ε soit un entier négatif égal à -N pour que le terme logarithmique soit potentiellement présent. Les deux racines soit alors respectivement : r_1=1+N et r_2=0. Les fonctions f_i (voir théorie de Fröbenius exposée par E.L.Ince dans son ouvrage « Ordinary Differential Equation », pages 356 et suivantes, page 396 et suivantes « Solution of linear differential equations in series » et paragraphe 16.33 page 404 et suivantes) sont définies comme suit :

$$\begin{cases}
P(z)=\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right)\quad Q(z)=\frac{\alpha\beta\, z-q}{z(z-1)(z-a)}\\
f(z-a,r)=r(r-1)+r\,(z-a)P(z)+(z-a)^2Q(z)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(r)(z-a)^i\\
(z-a)P(z)=\varepsilon+\gamma\frac{z-a}{z}+\delta\frac{z-a}{z-1}\quad (z-a)^2Q(z)=\frac{(z-a)(\alpha\beta\, z-q)}{z(z-1)}
\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}
(z-a)P(z)=\varepsilon+\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left(\gamma(a-1)^{l+1}+\delta\, a^{l+1}\right)\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l}\\
(z-a)^2Q(z)=-\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left(a^{l+1}(q-\alpha\beta)-q(a-1)^{l+1}\right)\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l}
\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}
f(z-a,r)=r(r-1+\varepsilon)+\frac{z-a}{a(a-1)}\sum_{l=0}^{l=+\infty}(-1)^l\left[(r\,\gamma+q)(a-1)^{l+1}+(r\,\delta-q+\alpha\beta)\,a^{l+1}\right]\frac{(z-a)^l}{a^l(a-1)^l}+\\
f_0(r)=r(r-1+\varepsilon)\\
f_l(r)=(-1)^{l-1}\frac{(r\,\gamma+q)(a-1)^l+(r\,\delta-q+\alpha\beta)\,a^l}{a^l(a-1)^l}\quad l\geq 1
\end{cases}$$

Lorsque ε=-N, r_1=1+N et r_2=0, la condition d'annulation donnée par E.L.Ince du terme logarithmique s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}_{N+1}(r=r_2=0)=\begin{bmatrix} f_1(N) & f_2(N-1) & f_3(N-2) & \dots & f_N(1) & f_{N+1}(0) \\ f_0(N) & f_1(N-1) & f_2(N-2) & \dots & f_{N-1}(1) & f_N(0) \\ 0 & f_0(N-1) & f_1(N-2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & f_2(1) & f_3(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$$

$$Avec \quad \begin{cases} f_0(N)=-N \\ f_l(N)=(-1)^{l-1}\dfrac{(N\gamma+q)(a-1)^l+(N\delta-q+\alpha\beta)a^l}{a^l(a-1)^l} & l\geq 1 \end{cases}$$

Lorsque ε=0 alors $\mathbf{F}_1(0)=f_1(0)=0\Leftrightarrow q(a-1)+(-q+\alpha\beta)a=0\Leftrightarrow q=a\,\alpha\beta$.

Lorsque ε=1 alors $\mathbf{F}_2(0)=\begin{bmatrix} f_1(1) & f_2(0) \\ f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=f_1(1)f_1(0)-f_0(1)f_2(0)=0$ *. Le numérateur simplifié de cette expression donne une équation du second degré en q :*

$$q^2-q(1-\gamma+a(\gamma+\delta-2+2\alpha\beta))+a\,\alpha\beta(a(\gamma+\delta-1+\alpha\beta)-\gamma)=0$$

Étant donné que la relation de Fuchs a court : $\gamma+\delta-2=\alpha+\beta$*, Cette équation devient :*

$$q^2-q(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\alpha\beta))+a\,\alpha\beta(a(1+\alpha)(1+\beta)-\gamma)=0$$

Pour ε=2, alors $\mathbf{F}_3(r=0)=\begin{bmatrix} f_1(2) & f_2(1) & f_3(0) \\ f_0(2) & f_1(1) & f_2(0) \\ 0 & f_0(1) & f_1(0) \end{bmatrix}=0$

il s'agit de trouver les racines d'un polynôme du troisième degré en q, sachant que la relation de Fuchs a court : $\gamma+\delta-3=\alpha+\beta$ *. L'expression de polynôme en* q^3 *est la suivante :*

$$q^3-q^2(3\gamma-4-a(1+3(\alpha+\beta+\alpha\beta)))+q\begin{pmatrix} a^2(2\beta(1+\beta)+2\alpha(1+5\beta+3\beta^2)+\alpha^2(2+6\beta+3\beta^2))+ \\ +a(\alpha(4+4\beta-4\gamma-6\beta\gamma)-4\beta(\gamma-1))+ \\ +2(\gamma-1)(\gamma-2) \end{pmatrix}$$
$$-a\,\alpha\beta(a^2(\alpha^2+3\alpha+2)(\beta^2+3\beta+2)-a\gamma(4+4\alpha+4\beta+3\alpha\beta)+2\gamma(\gamma-1))=0$$

Cela coïncide avec l'expression (2.7) obtenue par K.Takemura dans l'article de 2022 « Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial ». Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme (voir article de 2018 T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan « Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two-Term Recurrence ») :

$$((q-a\,\alpha\beta)^2+(q-a\,\alpha\beta)(4a-2-a(3+\alpha+\beta)+\gamma)+2a(a-1)\alpha\beta)(q-a\,\alpha\beta-2a(1+\alpha+\beta)+2(\gamma-1))+$$
$$+2a(a-1)(q-a\,\alpha\beta)(1+\alpha)(1+\beta)=0$$

Les deux développements indépendants pour les deux racines indicielles r1=1+N et r2=0 de l'équation de Heun autour de la singularité z=a (ici apparente) sont théroiquement construits comme suit :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}(z,1+N) = (z-a)^{1+N} \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j(r)(z-a)^j \qquad g_j(r) = C_0 f(r) \dfrac{(-1)^j \mathbf{F}_j(r)}{\prod_{i=1}^{j} f_0(r+i)} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} \widetilde{Z}(z,r)\Big|_{r=0} = \sum_{j=0}^{j=+\infty} g_j'(r)\Big|_{r=0} (z-a)^j \end{cases}$$

La relation de récurrence pour les coefficients du développement est la suivante :

$$j \in \mathbf{N} \qquad g_j(r) f_0(r+\nu) + g_{j-1}(r) f_1(r+\nu-1) + \ldots + g_1(r) f_{j-1}(r+1) + C_0 f_j(r) = 0$$

Cette expression de la relation de récurrence conduit à un développement de la solution suffisamment compliqué pour ne pas poursuivre le calcul plus avant. <u>Mais on peut simplifier la récurrence en exprimant l'équation différentielle sous la forme suivante</u> :

$$z(z-1)(z-a)y''(z) + z(z-1)(z-a)\left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\gamma}{z-a}\right)y'(z) + (\alpha\beta\, z - q)y(z) = 0$$
$$\textit{Soit} \quad p_0(z)y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0 \quad \textit{où} \quad p_0(z), p_1(z), p_2(z) \quad \textit{analytique autour de } z = a$$

Le développement de la forme : $(z-a)^r \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (z-a)^j$ *conduit à une relation de récurrence à trois termes, comme suit :*

$$P_j c_{j-1} + Q_j c_j + R_j c_{j+1} = 0 \qquad \begin{cases} P_j = (r+\alpha-1+j)(r+\beta-1+j) \\ Q_j = -(r+j)^2 - q - (r+j)(r-1+\gamma+\varepsilon) + a\left(2(r+j)^2 + \alpha\beta + (r+j)(\alpha+\beta-1+\varepsilon)\right) \\ R_j = a(a-1)(r+1+j)(r+\varepsilon+j) \end{cases}$$

Au passage l'équation indicielle se retrouve en annulant le degré minimal soit celui du terme (z-a)^r :

$$\textit{Terme} \quad (z-a)^r = 0 \Leftrightarrow P_{-1} = a(a-1)\, r(r+\varepsilon+1) = 0 \Leftrightarrow r(r+\varepsilon-1) = 0$$

D'autre part pour la racine indicielle r=0, le coefficient R_j dans la récurrence $P_j c_{j-1} + Q_j c_j + R_j c_{j+1} = 0$ *s'annule lorsque j=-ε. Pour que le coefficient c_{j+1} demeure fini et qu'ainsi le développement d'une solution de la forme* $\sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (z-a)^j$ *puisse exister, il convient que l'application de la relation de récurrence pour j=-ε=N (lorsque ε est un entier l'écart des racines indicielles est alors un entier) soit vérifiée :*

$$\varepsilon = -N \quad P_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon-1} + Q_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon} + R_{-\varepsilon} c_{-\varepsilon+1} = 0$$
$$P_{-\varepsilon} = (\alpha-1-\varepsilon)(\beta-1+\varepsilon) \qquad Q_{-\varepsilon} = a\alpha\beta - q + \varepsilon(\varepsilon+1)(2a-1) + \varepsilon(\gamma+\varepsilon - a(\alpha+\beta+1+\varepsilon)) \qquad R_{-\varepsilon} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1-\varepsilon)(\beta-1+\varepsilon)c_{-\varepsilon-1} + \left(a\alpha\beta - q + \varepsilon(\varepsilon+1)(2a-1) + \varepsilon(\gamma+\varepsilon - a(\alpha+\beta+1+\varepsilon))\right)c_{-\varepsilon} = 0$$

Le terme $c_{-\varepsilon}$ est donc parfaitement défini comme suit :

$$c_{-\varepsilon}=\frac{-(\alpha-1-\varepsilon)(\beta-1+\varepsilon)}{(a\alpha\beta-q+\varepsilon(\varepsilon+1)(2a-1)+\varepsilon(\gamma+\varepsilon-a(\alpha+\beta+1+\varepsilon)))}c_{-\varepsilon-1}$$

ainsi que tous les autres termes du développement $c_{-\varepsilon+j} \quad j>0$ en appliquant pour ces derniers la relation de récurrence :

$$P_{-\varepsilon+j}c_{-\varepsilon+j-1}+Q_{-\varepsilon+j}c_{-\varepsilon+j}+R_{-\varepsilon+j}c_{-\varepsilon+j+1}=0 \Leftrightarrow c_{-\varepsilon+j+1}=-\frac{P_{-\varepsilon+j}c_{-\varepsilon+j-1}+Q_{-\varepsilon+j}c_{-\varepsilon+j}}{R_{-\varepsilon+j}} \qquad R_{-\varepsilon+j}\neq 0$$

Si par construction les deux types de développement $y_1(z)=(z-a)^{1-\varepsilon}\sum_{j=0}^{j=+\infty}d_j(z-a)^j$ et $y_2(z)=\sum_{j=0}^{j=+\infty}c_j(z-a)^j$ sont indépendants alors la condition précédente garantit qu'il y a absence complète du terme logarithmique dans la solution indicielle r=0 (racine la plus petite) autour de z=a.

Or une solution autour de z=0 peut être est construite sous la forme d'un développement fini de fonctions hypergéométriques 2F1. Lorsque z est réel et si le paramètre a < 1 alors la fonction 2F1 est bien défini par son développement classique. Si la paramètre a > 1, il convient d'utiliser la continuation analytique de la fonction hypergéométrique 2F1 (utilisation de sa représentation intégrale par exemple) pour s'assurer de l'existence du développement d'Ishkhanyan de type (II.3) également autour de z=a.

Comme cette solution est indépendante de la solution indicielle r=1-ε, alors là encore si l'on retombe sur la même condition polynomiale conduisant à des valeurs spécifiques de q racines de ce polynôme, on peut affirmer que l'annulation du polynôme caractéristique $P_N(q)$ est bien la condition d'absence du terme logarithmique.

Je me suis assurée que les polynômes $P_N(q)$ calculés soit par la condition de E.L.Ince, soit par celle de K.Takemura et par celle donnée par T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan sont rigoureusement identiques tant que les valeurs de N sont compatibles avec la durée du temps de calcul réalisé par Mathematica.

Un cas particulier de récurrence à deux termes lié au développement d'Ishkhanyan de type (II.3)

Parmi le développement $Type\quad (II)\quad y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0+j;z)$

dont la relation de récurrence à trois termes sur les coefficients c_j est la suivante :

$$\begin{cases} Type\quad (II)\quad A_j^{(II)}c_{j-1}+\left(B_j^{(II)}-q\right)c_j+C_j^{(II)}c_{j+1}=0 \\ \begin{cases} A_j^{(II)}=\dfrac{a\,(\alpha-\gamma_0-j+1)(\beta-\gamma_0-j+1)(\gamma-\gamma_0-j+1)}{\gamma_0+j-1} \\ B_j^{(II)}=a\,\alpha\,\beta-(a-1)(\gamma_0+j-1)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0-j)+a\,(\gamma-\gamma_0-j)(\alpha+\beta-\gamma_0-j) \\ C_j^{(II)}=(a-1)(\gamma_0+j)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0-j-1) \end{cases} \end{cases}$$

Si nous posons :

$$a=\frac{1}{2}\quad \gamma+\delta=2\quad q=a\,\alpha\,\beta+a(1-\delta)\varepsilon\qquad \gamma_0=\gamma+\varepsilon\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon$$

$$B_j^{(II)}-q=a\,\alpha\,\beta-(a-1)(\gamma_0+j-1)(\gamma+\varepsilon-\gamma_0-j)+a\,(\gamma-\gamma_0-j)(\alpha+\beta-\gamma_0-j)$$

$$\Rightarrow B_j^{(II)}-q=-a(1-\delta)\varepsilon+j(a-1)(\gamma-1+\varepsilon+j)-a\,(\varepsilon+j)(\delta-1-j)$$

$$\Rightarrow B_j^{(II)}-q=j(\delta-1)(1-2a)+(2a-1)\,j^2+j\varepsilon(2a-1)$$

$$\Rightarrow B_j^{(II)}-q=0$$

La récurrence de type (II) devient une récurrence à deux termes, et l'expression du développement de type II devient :

$$c_{j+2}=A_j^{(II)}c_j\qquad avec\quad A_j^{(II)}=\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)(\gamma+\varepsilon-\beta+j)(\varepsilon+j)}{(\gamma+\varepsilon+j)(\gamma+\varepsilon+j+1)(j+2)}$$

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z)=\sum_{k=0}^{k=\infty}c_{2k}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+2k;z)$$

$$c_{2k+2}=A_{2k}^{(II)}c_{2k}\qquad avec\quad A_j^{(II)}=\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+2k)(\gamma+\varepsilon-\beta+2k)(\varepsilon+2k)}{(\gamma+\varepsilon+2k)(\gamma+\varepsilon+2k+1)(2k+2)}=\frac{\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\alpha}{2}+k\right)\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\beta}{2}+k\right)\left(\dfrac{\varepsilon}{2}+k\right)}{(k+1)\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}+k\right)\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon+1}{2}+k\right)}$$

$$\Rightarrow y(z)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\alpha}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\beta}{2}\right)_k\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)_k}{k!\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon+1}{2}\right)_k}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+2k;z)$$

La valeur en z=0 est la valeur de la fonction hypergéométrique généralisée en z=1 :

$$y(0)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\alpha}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\beta}{2}\right)_k\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)_k}{k!\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon+1}{2}\right)_k}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+2k;0)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\alpha}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon-\beta}{2}\right)_k\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)_k}{k!\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}\right)_k\left(\dfrac{\gamma+\varepsilon+1}{2}\right)_k}={}_3F_2\left(\frac{\gamma+\varepsilon-\alpha}{2},\frac{\gamma+\varepsilon-\beta}{2},\frac{\varepsilon}{2};\frac{\gamma+\varepsilon}{2};\frac{\gamma+\varepsilon+1}{2};1\right)$$

Développement d'une récurrence à deux termes à partir du développement d'Ishkhanyan de type (II.3)

Dans l'article « Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two-Term Recurrence » les auteurs T.A.Ishkhanyan, T.A.Shahverdyan, A.M.Ishkhanyan suggèrent un autre développement récurrent à deux termes afin de le comparer au développement 2.3 (voir formules (51) et (52) de l'article). Pour cela il calque la récurrence à deux termes sur celle des coefficients du développement autour de z=0 de la fonction généralisée hypergéométrique suivante :

$$ {}_{N+2}F_{N+1}(\gamma+\varepsilon-\alpha, \gamma+\varepsilon-\beta, e_1+1, \ldots, e_N+1 ; \gamma+\varepsilon, e_1, \ldots, e_N ; z) $$

dont le rapport entre deux coefficients successifs est le suivant :

$$ h_0 = \infty \Leftrightarrow \frac{1}{h_0} = 0 \quad et \quad h_j = \frac{c_j}{c_{j-1}} = \frac{1}{j} \times \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{(\gamma+\varepsilon+j-1)} \times \frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)} $$

Et que l'on injecte dans la récurrence d'Ishkhanyan de type (II.3) sous la forme suivante :

$$ \begin{cases} A_j^{(II.3)} = \dfrac{a\,(\alpha-\gamma-\varepsilon-j+1)(\beta-\gamma-\varepsilon-j+1)(1-\varepsilon-j)}{\gamma+\varepsilon+j-1} \\ B_j^{(II.3)} = a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma+\varepsilon+j-1) - a\,(\varepsilon+j)(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon-j) \\ C_j^{(II.3)} = -(a-1)(\gamma+\varepsilon+j)(j+1) \end{cases} $$

$$ \begin{cases} y(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma+\varepsilon+j; z) \\ A_j^{(II.3)} c_{j-1} + B_j^{(II.3)}\, c_j + C_j^{(II.3)} c_{j+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0^{(II.3)} + C_0^{(II.3)} h_1 = 0 \\ \dfrac{A_j^{(II.3)}}{h_j} + B_j^{(II.3)} + C_j^{(II.3)} h_{j+1} = 0 \quad pour \quad j > 0 \end{cases} $$

Comme auparavant utilisons les produits symétriques s_i des paramètres e_i et leur linéarisation :

$$ \begin{cases} s_1 = \sum_{l=1}^{l=N} e_l \qquad s_2 = \sum_{i,j=1, i>j}^{i,j=N} e_i e_j \qquad s_3 = \sum_{i,j,k=1, i>j>k}^{i,j=N} e_i e_j e_k \\ \ldots \\ s_{N-1} = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1, i_1>\ldots>i_{N-1}}^{i_1,\ldots,i_N} e_{i_1} \times \ldots \times e_{i_{N-1}} \qquad s_N = \prod_{l=1}^{l=N} e_l \end{cases} \Rightarrow \prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j) = \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l \qquad \prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1) = \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-1)^l $$

Les rapports de deux coefficients successifs donnent :

$$ h_j = \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-1)^l} \qquad h_{j+1} = \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)(\gamma+\varepsilon-\beta+j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j+1)^l}{(j+1)(\gamma+\varepsilon+j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l} $$

D'où une équation algébrique de degré N+2 en j pour tout indice j>=0 (même l'équation pour j=0 peut-être retrouvé en posant j=0) :

$$\begin{cases} \dfrac{A_j^{(II.3)}}{h_j} = -j \times \dfrac{a\,(\varepsilon + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l} \\ B_j^{(II.3)} = a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j) \\ C_j^{(II.3)} h_{j+1} = (1-a)\dfrac{(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l} \end{cases} \qquad \frac{A_j^{(II.3)}}{h_j} + B_j^{(II.3)} + C_j^{(II.3)} h_{j+1} = 0$$

$$\Rightarrow -j\,a\,(\varepsilon + j - 1) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l + B_j^{(II.3)} \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l + (1-a)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

$$\Leftrightarrow -j\,a\,(\varepsilon + j - 1) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l + (a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j)) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l + (1-a)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

On vérifie aisément que le terme de degré N+2 de cette équation algébrique pour un indice j>0 s'annule :

$$-j\,a\,(\varepsilon + j - 1) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l + (a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j)) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l +$$

$$+(1-a)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

$$\text{Termes de sommation } l = N \text{ et } l = N-1 \rightarrow \begin{Bmatrix} -j\,a\,(\varepsilon + j - 1) \times \left(s_0 (j-1)^N + s_1 (j-1)^{N-1}\right) + \\ (a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j))\left(s_0 j^N + j\,s_1^{N-1}\right) + \\ (1-a)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times \left(s_0 (j+1)^N + s_1 (j+1)^{N-1}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\approx \begin{Bmatrix} -j\,a\,(\varepsilon + j - 1) \times j^{N-2} \times \left(s_0 \left(j^2 - N\,j\right) + s_1 (j - (N-1))\right) + \\ (a\,\alpha\,\beta - q + j\,(a-1)(\gamma + \varepsilon + j - 1) - a\,(\varepsilon + j)(\alpha + \beta - \gamma - \varepsilon - j)) \times j^{N-2} \times \left(s_0 j^2 + j\,s_1\right) + \\ (1-a)(\gamma + \varepsilon - \alpha + j)(\gamma + \varepsilon - \beta + j) \times j^{N-2} \times \left(s_0 \left(j^2 + N\,j\right) + s_1 (j + (N-1))\right) \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \text{Terme} \quad j^{N+2} = -a\,s_0 + (2a-1)\,s_0 + (1-a)\,s_0 = 0 \\ \text{Terme} \quad j^{N+1} = s_0 (\gamma + \varepsilon + N + 1 - \alpha - \beta) \end{cases}$$

Le terme de degré N+1 doit également s'annuler, il vient donc une contrainte directe sur le paramètre δ :

$$\gamma + \varepsilon + N + 1 - \alpha - \beta = \alpha + \beta - \delta + N + 2 - \alpha - \beta = -\delta + N + 2 = 0 \Rightarrow \delta = N + 2$$

Il reste donc un système de N+1 équations linéaires selon les variables symétriques s_1 , …, s_N . L 'une quelconque de ces équations est en trop (prenons celle du terme de degré N en j) . Elle sera automatiquement vérifiée par une condition d'annulation d'un polynôme en q de degré N+1, une fois qu'on lui injecte les solutions s_1 , …, s_N en fonction des paramètres a,q,α,β,γ,N obtenue par résolution du système linéaire de N premières équation (degré 0 à N-1 de l'équation algébrique en j).

Pour obtenir la condition sur le paramètre q, il suffit même d'écrire le système d'équations linéaire selon les variables symétriques dans l'ordre inverse s_N, s_{N-1} , ...,s_1,s_0=1 :

$$\begin{cases} Terme \quad j^0 \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N} d_{0,l} s_{N-l} = 0 \\ Terme \quad j^1 \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N} d_{1,l} s_{N-l} = 0 \\ \dots \\ Terme \quad j^N \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N} d_{N,l} s_{N-l} = 0 \end{cases} \Rightarrow Det([d_{j,l}]) = 0$$

Seuls les éléments diagonaux de la matrice $[d_{j,l}]$ en question se présente sous la forme : $d_{j,j} = f_j(a,\alpha,\beta,\gamma,N) - q$. Les autres éléments non diagonaux sont uniquement fonctions des paramètres a,α,β,γ,N. Cela assure bien que l'annulation du déterminant donne une équation polynomiale de degré N+1 en q. Une fois déterminées les valeurs de s_N, s_{N-1} , ...,s_1 , la forme du développement ainsi construit est le suivant :

$$y(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \; {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z) \qquad h_j = \frac{c_j}{c_{j-1}} = \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1)} \times \frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l}{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-1)^l} = \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1)} \times \frac{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} j^l + j^N}{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} (j-1)^l + (j-1)^N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{-1} = 0 \qquad c_0 = 1 \\ c_j = \frac{1}{j!} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)} \times \frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l}{s_N} = \frac{1}{j!} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)} \times \frac{\prod_{l=1}^{l=N} (j+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \end{cases}$$

Lorsque j=0, ce qui équivaut à déterminer le terme de puissance j^0, on peut montrer que quelque soit N, la valeur du produit : $\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l}$ est égale à : $\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} = \frac{1+\sum_{l=1}^{l=N} s_l}{s_N} = \frac{-q+a(\alpha\beta-\varepsilon(N+1))}{(a-1)(N+1-\alpha)(N+1-\beta)}$. En effet partons de l'équation algébrique en j et posons j=0 :

$$j = 0 \Rightarrow (a\,\alpha\,\beta - q - a\,\varepsilon(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon)) \times s_N + (1-a)(\gamma+\varepsilon-\alpha)(\gamma+\varepsilon-\beta) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}}{s_N} = \frac{-q+a\,(\alpha\,\beta-\varepsilon(1+N))}{(a-1)(N+1-\alpha)(N+1-\beta)}$$

En prenant maintenant le terme de puissance j^{N+1}, s_1 est invariablement égale à :

$$s_1 = \sum_{l=1}^{l=N} e_l = -q + a\,(\gamma+N) - \frac{N(N+1)}{2} + (1-\alpha)(1-\beta)$$

Remarque importante *: je suis dubitatif sur la convergence rapide de cette forme de solution, car une fois testée numériquement la solution ne semble pas de premier abord respecter rétrospectivement l'équation différentielle de Heun.*

Mais un test numérique a finalement révélé que l'équation différentielle est bien respecté comme suit. Introduisons l'opérateur différentielle de Heun :

$$DHeun\{\partial, y, z\} = z(z-1)(z-a)\left(y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)\right)$$

L'application de cet opérateur sur les fonctions de base du développement se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} DHeun\left\{\frac{d}{dz},\ {}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+j\,;.),z\right\} = \begin{Bmatrix} PHeun(j,-1)\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j-1;z)+ \\ +PHeun(j,0)\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z)+ \\ +PHeun(j,+1)\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j+1;z) \end{Bmatrix} \\ PHeun(j,-1) = (1-a)\ j\ (\gamma+\varepsilon+j-1) = C_{j-1}^{(II.3)} \\ PHeun(j,0) = j^2(2a-1)+j\ (1+\gamma\ (a-1)+(2a-1)\varepsilon-a\ \delta)-q+a\ \alpha\ \beta+a\ \varepsilon(1-\delta) = B_j^{(II.3)} \\ PHeun(j,+1) = a\ (\varepsilon+j)\left(\delta-1-j-\frac{\alpha\ \beta}{\gamma+\varepsilon+j}\right) = A_{j+1}^{(II.3)} \end{cases}$$

Expression obtenue en comparant avec les termes de la récurrence :

$$\begin{cases} A_j^{(II.3)} = a\ \frac{(\alpha-\gamma-\varepsilon-j+1)(\beta-\gamma-\varepsilon-j+1)(1-\varepsilon-j)}{\gamma+\varepsilon+j-1} \\ B_j^{(II.3)} = a\ \alpha\ \beta+j\ (a-1)(\gamma+\varepsilon+j-1)-a\ (\varepsilon+j)(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon-j)-q \\ C_j^{(II.3)} = -(a-1)(\gamma+\varepsilon+j)(j+1) \end{cases}$$

Soit: $DHeun\left\{\frac{d}{dz},\ {}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+j\,;.),z\right\} = C_{j-1}^{(II.3)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j-1;z)+B_j^{(II.3)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z)+A_{j+1}^{(II.3)}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j+1;z)$

Alors si l'opérateur différentielle est appliqué sur une approximation du développement avec M+1 termes, alors il vient l'approximation suivante de l'équation différentielle de Heun :

$$y(M,z) = \sum_{j=0}^{j=M} c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z) \qquad c_0 = 1 \qquad c_j = \frac{1}{j!}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(j+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l}$$

$$DHeun\left\{\frac{d}{dz}, y(M,.),z\right\} = \frac{c_{M-1}A_M^{(II.3)}\times\ {}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+c_M\left(B_M^{(II.3)}\times\ {}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+A_{M+1}^{(II.3)}\times\ {}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M+1\,;z)\right)}{z\ (z-1)(z-a)}$$

Autrement dit l'équation différentielle est respectée modulo un terme résiduel qui demeure non nul même à très grande valeur de M et qui ne dépend fondamentalement que des deux derniers termes de développement à M+1 valeurs. Soit que la convergence est extrêmement lente.

En examinant la limite lorsque M tend vers l'infini, je n'arrive pas à une conclusion franche : la convergence de la solution d'Ishkhanyan est-elle établie si la limite de l'expression suivante est nulle :

$$y(M,z)=\sum_{j=0}^{j=M} c_j \; {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z) \qquad c_0=1 \qquad c_j=\frac{1}{j\,!}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(j+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N}e_l}$$

$$h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\times(\gamma+\varepsilon+j-1)}\times\frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\,j^l}{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\,(j-1)^l} \qquad \begin{cases} A_j^{(II.3)}=a\,\dfrac{(\alpha-\gamma-\varepsilon-j+1)(\beta-\gamma-\varepsilon-j+1)(1-\varepsilon-j)}{\gamma+\varepsilon+j-1} \\ B_j^{(II.3)}=a\,\alpha\,\beta-q+j\,(a-1)(\gamma+\varepsilon+j-1)-a\,(\varepsilon+j)(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon-j) \\ C_j^{(II.3)}=-(a-1)(\gamma+\varepsilon+j)(j+1) \end{cases}$$

$$DHeun\left\{\frac{d}{dz},y(M,.),z\right\}=\frac{c_{M-1}A_M^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+c_M\left(B_M^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+A_{M+1}^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M+1\,;z)\right)}{z\,(z-1)(z-a)}$$

$$\underset{M\to\infty}{Lim}\quad DHeun\left\{\frac{d}{dz},y(M,.),z\right\}=0$$

La limite des fonctions hypergéométriques est assez facile à établir d'après la définition générale :

$${}_2F_1(A,B\,;C\,;z)=\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(A)_l(B)_l}{(C)_l}\frac{z^l}{l!}=1+z\frac{AB}{C}+z\frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)}\Rightarrow\underset{C\to+\infty}{Lim}\quad(C)_l=+\infty\Rightarrow\underset{C\to+\infty}{Lim}\quad{}_2F_1(A,B\,;C\,;z)=1$$

Et pour cela nous avons :

$$A_M^{(II.3)}c_{M-1}+B_M^{(II.3)}\,c_M+C_M^{(II.3)}c_{M+1}=0\Rightarrow DHeun\left\{\frac{d}{dz},y(M,.),z\right\}\approx\frac{A_M^{(II.3)}c_{M-1}+B_M^{(II.3)}c_M+A_{M+1}^{(II.3)}c_M}{z\,(z-1)(z-a)}\approx\frac{A_{M+1}^{(II.3)}c_M-C_M^{(II.3)}c_{M+1}}{z\,(z-1)(z-a)}$$

$$\approx c_{M+1}\frac{A_{M+1}^{(II.3)}\dfrac{c_M}{c_{M+1}}-C_M^{(II.3)}}{z\,(z-1)(z-a)}\approx c_{M+1}\frac{\dfrac{A_{M+1}^{(II.3)}}{h_{M+1}}-C_M^{(II.3)}}{z\,(z-1)(z-a)}$$

L'étude numérique de cette limite ne permet pas d'obtenir une valeur limite franche à zéro.

Les premiers développement pour N=0 et N=1

Prenons N=0,

Le traitement du cas N=0 est spécifique car le système d'équations linéaire n'en comporte plus qu'une :

$$\text{Sachant que } \alpha+\beta-\gamma-\varepsilon=1 \Leftrightarrow \gamma+\varepsilon-\alpha=\beta-1 \Leftrightarrow \gamma+\varepsilon-\beta=\alpha-1$$

$$\begin{cases} B_0^{(II.3)}+C_0^{(II.3)}h_1=0 \qquad h_1=\dfrac{(\gamma+\varepsilon-\alpha)(\gamma+\varepsilon-\beta)}{\gamma+\varepsilon} \\ \Leftrightarrow (a\,\alpha\,\beta-q-a\,\varepsilon(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon))+(1-a)(\gamma+\varepsilon-\alpha)(\gamma+\varepsilon-\beta)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q=(1-a)(\gamma+\varepsilon-\alpha)(\gamma+\varepsilon-\beta)+a\,\alpha\,\beta-a\,\varepsilon\,(\alpha+\beta-\gamma-\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow q=(\beta-1)(\alpha-1)-a(\beta-1)(\alpha-1)+a\,\alpha\,\beta-a\,\varepsilon \Leftrightarrow q=a\,\gamma+(\beta-1)(\alpha-1)$$

Donc le polynôme de degré 1 en q dont les racines déterminent les valeurs de q est le suivant:

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z) \qquad q=a\,\gamma+(\alpha-1)(\beta-1) \qquad h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1)}$$

$$\Rightarrow c_0=1 \qquad c_j=\frac{1}{j\,!}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\,\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\,\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)}\times\frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)}=\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,(\gamma+\varepsilon-\beta)_j}{(\gamma+\varepsilon)_j}$$

$$\text{Symbole de Pochhammer} \quad (\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,,(\gamma+\varepsilon-\beta)_j\,,(\gamma+\varepsilon)_j$$

Compte tenu de la relation de Fuchs on peut écrire encore plus simplement

$$q=a\,\gamma+(\alpha-1)(\beta-1) \qquad \text{Relation de Fuchs} \quad \alpha+\beta-1=\gamma+\varepsilon$$

$$\text{Symbole de Pochhammer} \quad (\alpha-1)_j\,,(\beta-1)_j\,,(\alpha+\beta-1)_j$$

$$\begin{cases} y(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha-1)_j\,(\beta-1)_j}{(\alpha+\beta-1)_j}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+\beta-1+j;z) \\ y'(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha-1)_j\,(\beta-1)_j}{(\alpha+\beta-1)_j}\ \frac{{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\alpha+\beta+j;z)}{\alpha+\beta-1+j} \\ y''(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha-1)_j\,(\beta-1)_j}{(\alpha+\beta-1)_j}\ \frac{{}_2F_1(\alpha+2,\beta+2;\alpha+\beta+1+j;z)}{(\alpha+\beta-1+j)(\alpha+\beta+j)} \end{cases} \Rightarrow \ y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{\alpha+\beta-1-\gamma}{z-a}\right)y'(z)+\frac{\alpha\,\beta\,z-q}{z(z-1)(z-a)}\,y(z)=0$$

Le code Mathematica suivant permet de tester numériquement ce développement :

```
Clear[qPolynom2TermN0];
Clear[Heun2TermN0Expansion];
Clear[Heun2TermN0ExpansionPrime];
Clear[Heun2TermN0ExpansionPrime2];
Clear[Heun2TermN0ExpansionED];

qPolynom2TermN0[a_,q_,α_,β_,γ_] := q -(α-1) (β-1) -a γ;
qRoot2TermN0[a_,q_,α_,β_,γ_] := (α-1) (β-1)+a γ;

Heun2TermN0Expansion[nTerm_Integer,α_,β_,γ_,z_]:=
Sum[N[(Pochhammer[β-1,j] Pochhammer[α-1,j])/( j! Pochhammer[α+β-1,j])*
Hypergeometric2F1[ α,β,j+α+ β-1,z]],{j,0,nTerm}];

Heun2TermN0ExpansionPrime[nTerm_Integer,α_,β_,γ_,z_]:=
Sum[N[(Pochhammer[β-1,j] Pochhammer[α-1,j])/(j ! Pochhammer[α+β-1,j])*
(αβHypergeometric2F1[1+α,1+β,j+α+ β,z])/(j+α+β-1)],{j,0,nTerm}];

Heun2TermN0ExpansionPrime2[nTerm_Integer,α_,β_,γ_,z_]:=
Sum[N[(Pochhammer[β-1,j] Pochhammer[α-1,j])/(j! Pochhammer[α+ β-1, j])*
(α(1+α)β(1+β)Hypergeometric2F1[2+ α,2+β,1+j+α+β,z])/((j+α+ β- 1) (j+α+ β))],{j,0,nTerm}];

Heun2TermN0ExpansionED[nTerm_Integer,a_,q_,α_,β_,γ_,z_] :=
  Heun2TermN0ExpansionPrime2[nTerm, α,β,γ,z]+(γ/z+2/(z -1)+(α+β-1-γ)/(z -a)) Heun2TermN0ExpansionPrime[nTerm, α,β,γ,z]+
(α*β*z-q)/(z (z -1) (z -a))*Heun2TermN0Expansion[nTerm, α,β,γ,z];
```

***Prenons N=1**, le polynôme de degré 2 en q dont les racines déterminent les valeurs de q est le suivant:*

$$\begin{cases} P_2(q) = q^2 - q\left(4 + a - 3\alpha - 3\beta + 2\alpha\beta + 3a\gamma\right) + (\alpha-1)(\beta-1)(\alpha-2)(\beta-2) + a\,\gamma\left(4 + 2a - 4\alpha - 4\beta + 3\alpha\beta\right) + 2a^2\gamma^2 \\ P_2(q) = 0 \end{cases}$$

$$y(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z) \qquad h_j = \frac{c_j}{c_{j-1}} = \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1)} \times \frac{s_1+j}{s_1} \qquad e_1 = s_1$$

$$e_1 = -q + a\,(1+\gamma) - 1 + (\alpha-1)(\beta-1) = \frac{(a-1)(\alpha-2)(\beta-2)}{2\,a\,\gamma - q + (\alpha-2)(\beta-2)} \qquad \frac{1+e_1}{e_1} = \frac{-q + 2\,a\gamma + (2-\alpha)(2-\beta)}{(a-1)(2-\alpha)(2-\beta)}$$

$$\Rightarrow c_0 = 1 \qquad c_j = \frac{1}{j\,!} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha+j)\,\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta+j)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon-\alpha)\,\Gamma(\gamma+\varepsilon-\beta)} \times \frac{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon+j)} \times \frac{s_1+j}{s_1} = \frac{1}{j\,!} \times \frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,(\gamma+\varepsilon-\beta)_j}{(\gamma+\varepsilon)_j} \times \frac{e_1+j}{e_1}$$

Symbole de Pochhammer $(\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,, (\gamma+\varepsilon-\beta)_j\,, (\gamma+\varepsilon)_j$

Prenons N=2, *le polynôme de degré 3 en q dont les racines déterminent les valeurs de q est le suivant:*

$$
\begin{aligned}
&q^3+\\
&+q^2\left(-10-3\alpha(\beta-2)+6\beta-a(4+6\gamma)\right)+\\
&+q\left(33+\beta(11\beta-40)+\alpha^2(11+3\beta(\beta-4))-2\alpha(2\beta-5)(3\beta-4)+a^2\left(4+18\gamma+11\gamma^2\right)+2a\left(6+15\gamma-\beta(4+11\gamma)+\alpha(-4-11\gamma+\beta(2+6\gamma))\right)\right)-\\
&-(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha-2)(\beta-2)(\alpha-3)(\beta-3)-\\
&-2a\gamma\left(\alpha^2\left(9-11\beta+3\beta^2\right)+\alpha\left(-27+37\beta-11\beta^2\right)+9\left(2-3\beta+\beta^2\right)\right)+\\
&+a^2\gamma\left(18\alpha(\gamma+1)+18(\beta-1)(\gamma+1)-\alpha\beta(10+11\gamma)\right)-\\
&-6a^3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)=0
\end{aligned}
$$

$$
y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z)\qquad h_j=\frac{c_j}{c_{j-1}}=\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha+j-1)(\gamma+\varepsilon-\beta+j-1)}{j\,(\gamma+\varepsilon+j-1)}\times\frac{s_2+j\,s_1+j^2}{s_2}
$$

$$
s_1=e_1+e_2=-q+a\,(\gamma+2)-3+(1-\alpha)(1-\beta)\qquad s_2=e_1e_2\qquad \frac{s_2+s_1+1}{s_2}=\frac{(1+e_1)(1+e_2)}{e_1e_2}=\frac{-q+3\,a\gamma+(3-\alpha)(3-\beta)}{(a-1)(3-\alpha)(3-\beta)}
$$

$$
\Rightarrow c_0=1\quad c_j=\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,(\gamma+\varepsilon-\beta)_j}{(\gamma+\varepsilon)_j}\times\frac{s_2+j\,s_1+j^2}{s_2}
$$

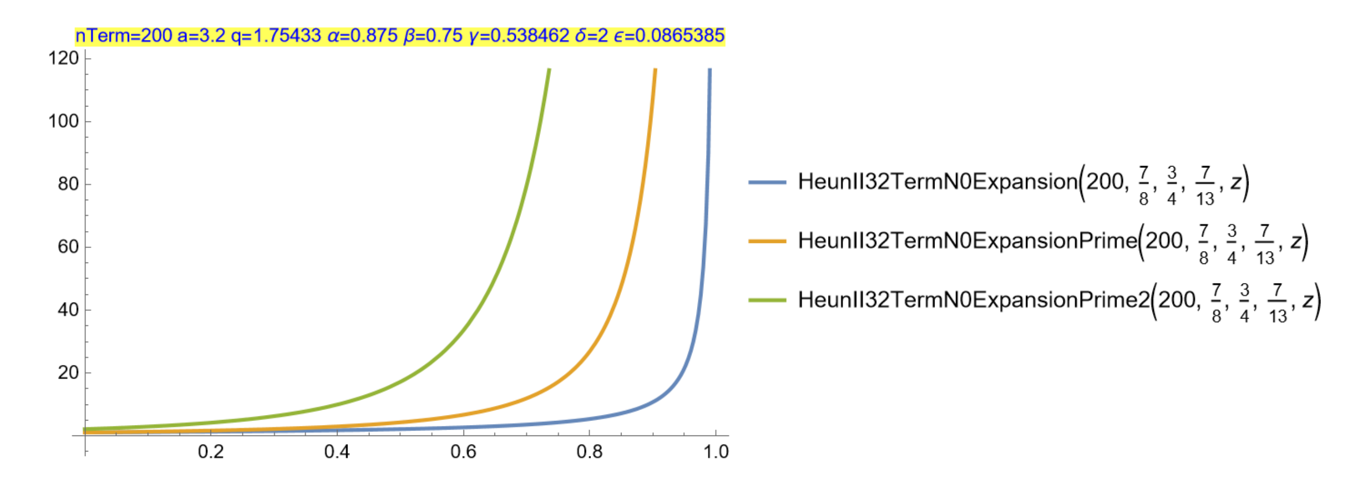
$$
\text{Symbole de Pochhammer}\quad(\gamma+\varepsilon-\alpha)_j\,,(\gamma+\varepsilon-\beta)_j\,,(\gamma+\varepsilon)_j
$$

Voici quelques graphes qui illustrent le défaut de convergence. En effet il convient systématiquement de corriger le test d'observance de l'équation différentielle de Heun par le terme additionnel calculé à un développement à M+1 termes que voici :

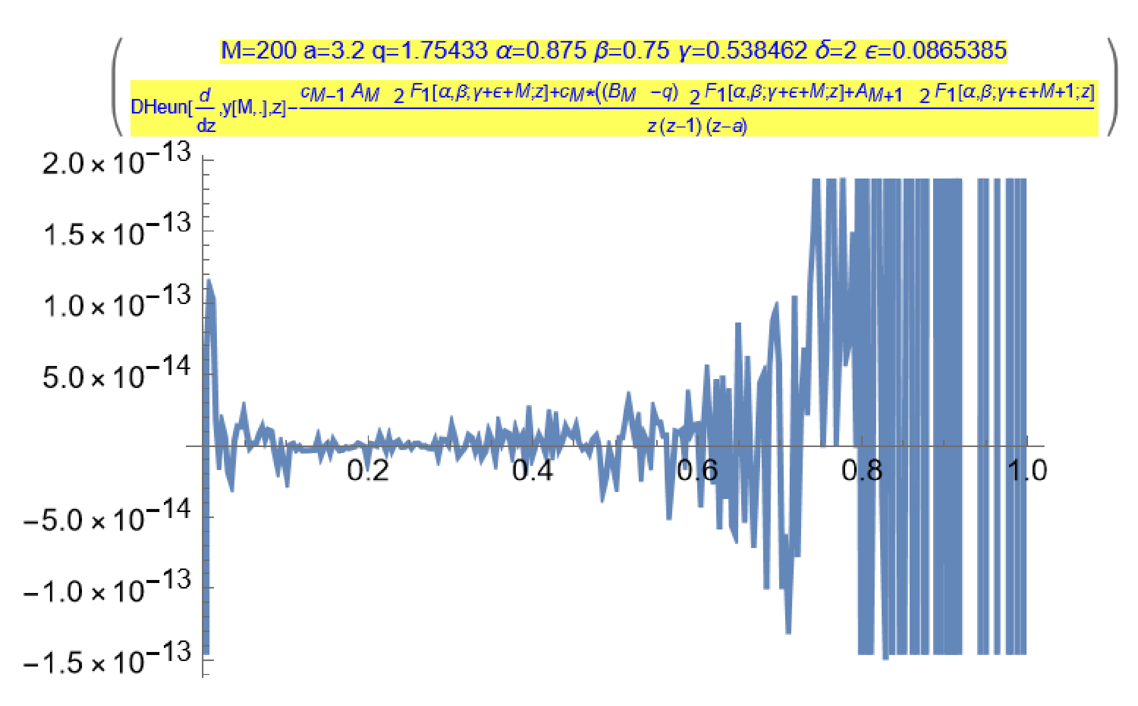
$$
DHeun\left\{\frac{d}{dz},y(M,.),z\right\}=\frac{c_{M-1}A_M^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+c_M\left(B_M^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M\,;z)+A_{M+1}^{(II.3)}\times{}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma+\varepsilon+M+1\,;z)\right)}{z\,(z-1)(z-a)}
$$

N=0, δ=2

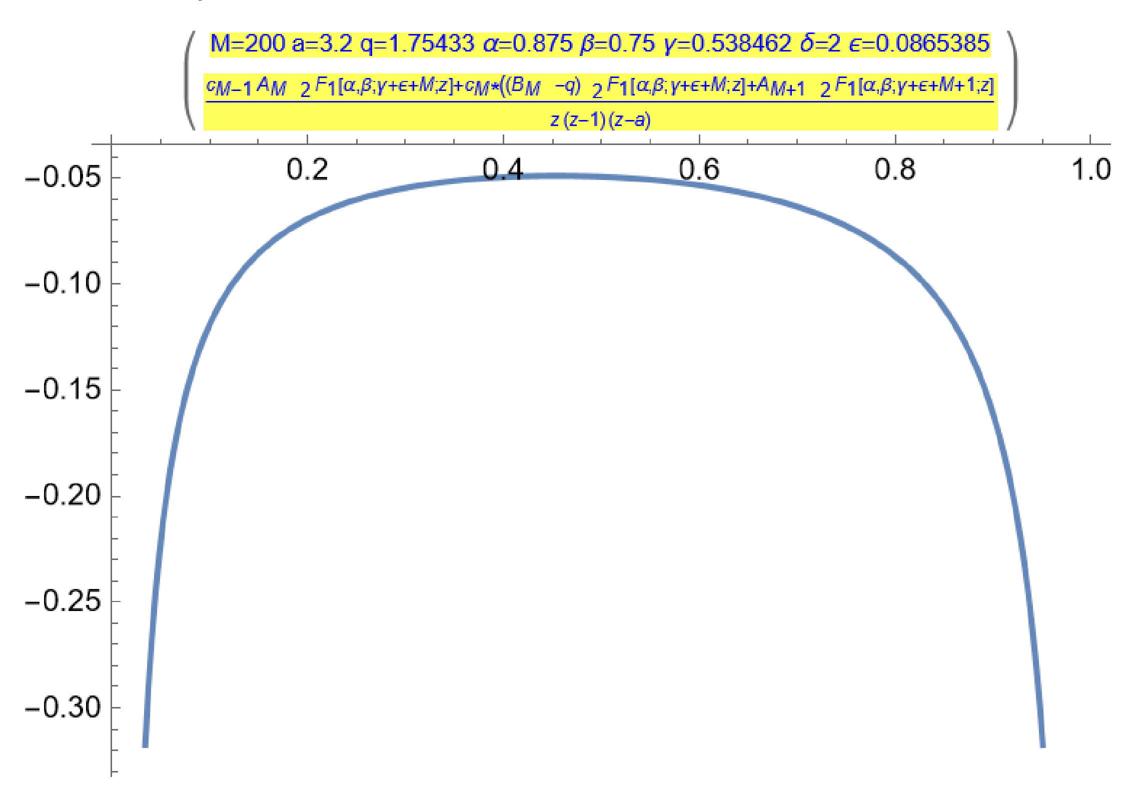
La fonction, ses dérivées première et seconde



L'observance de l'équation différentielle de Heun et son terme correctif :

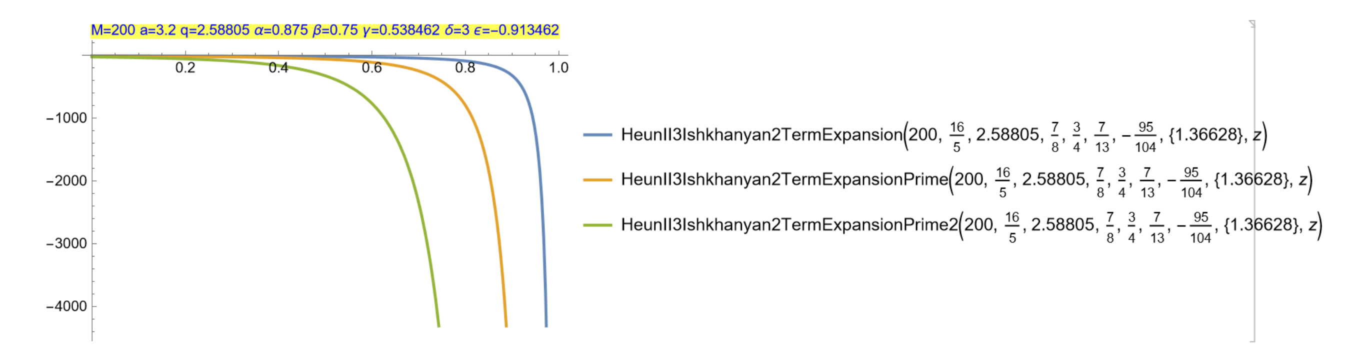


Le seul terme correctif :

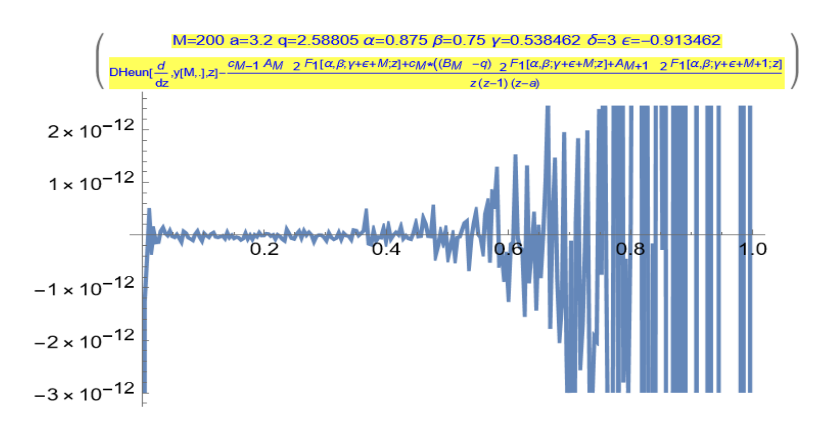


N=1, δ=3

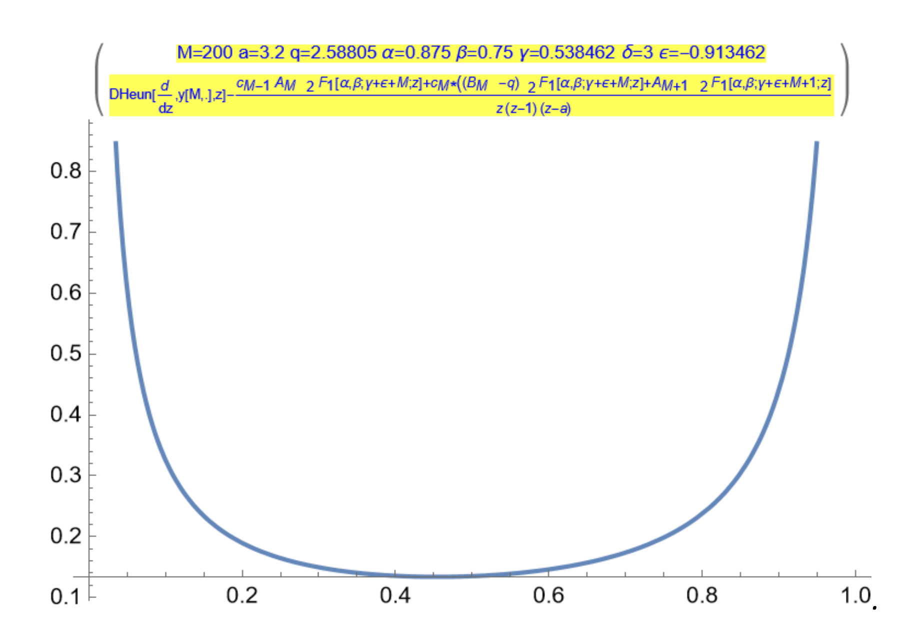
La fonction, ses dérivées première et seconde



L'observance de l'équation différentielle de Heun et son terme correctif :

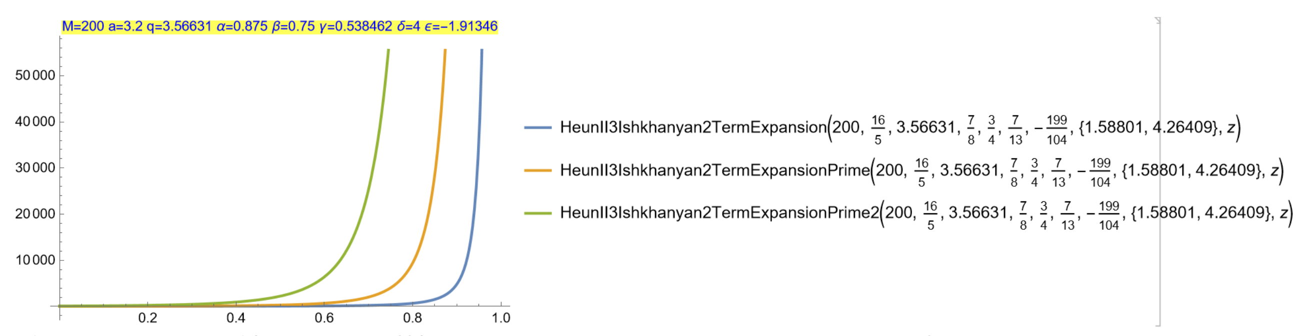


Le seul terme correctif :

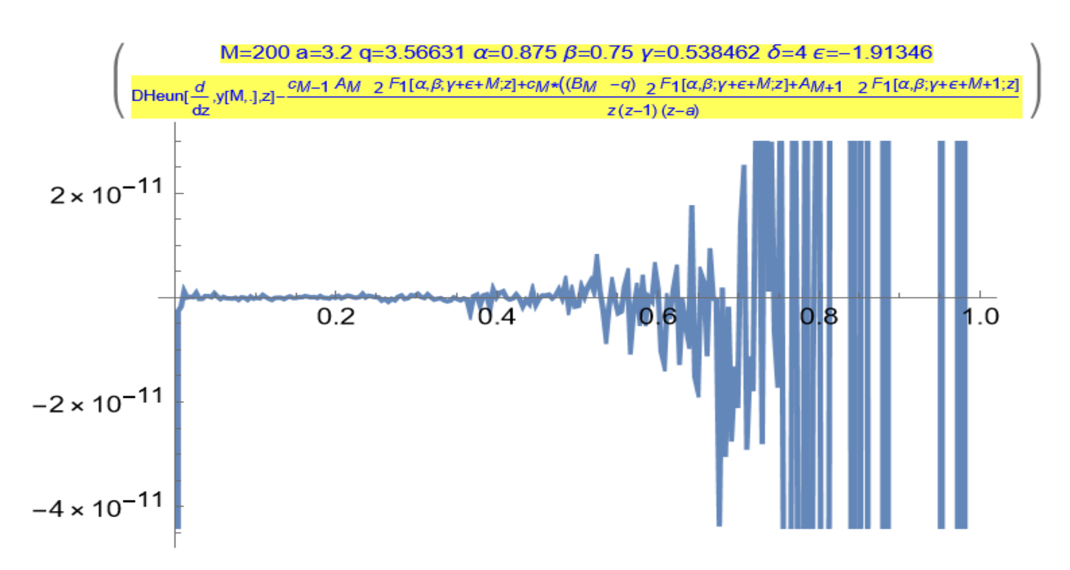


N=2, δ=3

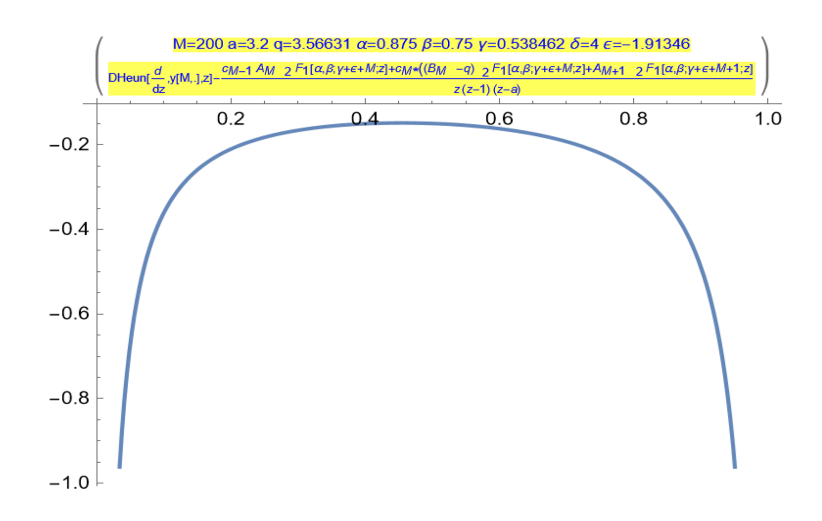
La fonction, ses dérivées première et seconde



L'observance de l'équation différentielle de Heun et son terme correctif :

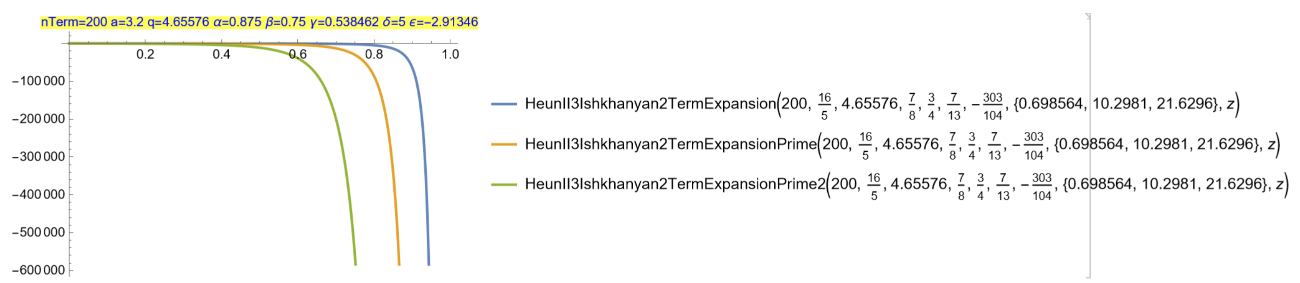


Le seul terme correctif :

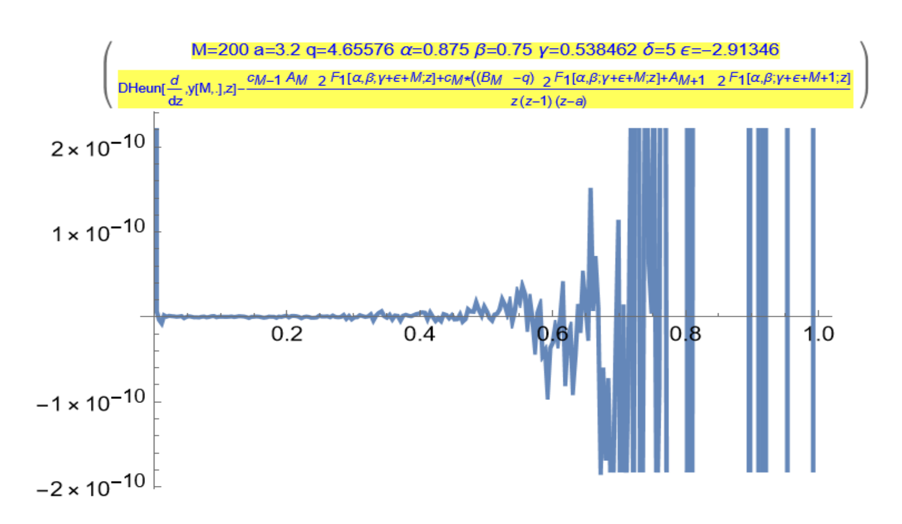


N=3, δ=4

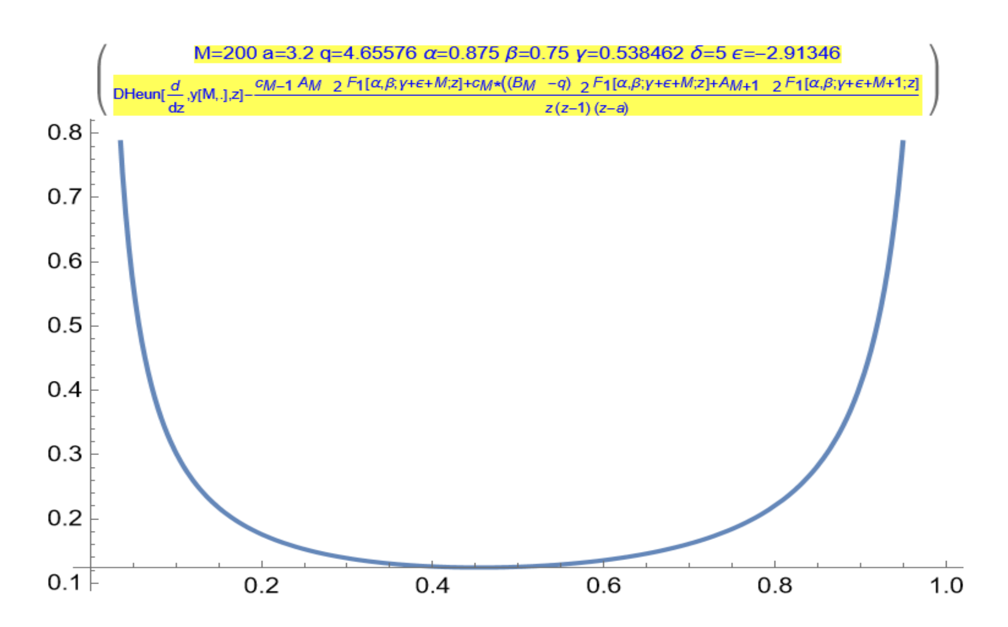
La fonction, ses dérivées première et seconde



L'observance de l'équation différentielle de Heun et son terme correctif :



Le seul terme correctif :



Développements hypergéométriques de Figueiredo

Soit l'équation de Heun : $y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$

Dans un article de B.Figueiredo de 2011 « Solutions of Heun's general equation and elliptic Darboux equation », page 15 formules (73a) et (73b), le développement suivant est proposé :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\alpha+j,\gamma+\delta-\alpha-1\,;\gamma+j\,;z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)$$

$$\textit{Relation de Fuchs}\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon\rightarrow\gamma+\delta-\alpha-1=\beta-\varepsilon$$

Pour établir la récurrence notons que l'équation de Heun est équivalente à la suivante :

$$(z-a)(z(z-1)y''(z)+z(\gamma+\delta)y'(z)-\gamma\ y'(z))+\varepsilon\ z(z-1)y'(z)+(\alpha\ \beta\ z-q)y(z)=0$$

Calculons les dérivées première et secondes du développement :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times F_j(z)$$

$$y'(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times\left[\frac{d}{dz}+\frac{j}{z}\right]\times F_j(z)$$

$$y''(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\ z^j\times\left[\frac{d^2}{dz^2}+2\frac{j}{z}\frac{d}{dz}+j(j-1)\right]\times F_j(z)$$

La fonction hyper-géométrique est solution de l'équation différentielle :

$$F_j(z)={}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)={}_2F_1(\alpha+j,\gamma+\delta-\alpha-1\,;\gamma+j\,;z)$$

$$z(1-z)F_j''(z)+(\gamma+j-(\alpha+\beta+1-\varepsilon+j)z)F_j'(z)-(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)F_j(z)=0$$

$$z(1-z)F_j''(z)+(\gamma+j-(\gamma+\delta+j)z)F_j'(z)-(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)F_j(z)=0$$

$$\Leftrightarrow z(1-z)F_j''(z)+((\gamma+j)(1-z)-\delta\ z)F_j'(z)-(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)F_j(z)=0$$

$$\Leftrightarrow F_j''(z)=-\left(\frac{\gamma+j}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)F_j'(z)-\frac{(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)F_j(z)}{z(z-1)}$$

Combinant ces diverses relations avec les relations aux plus proches voisins concernant les fonctions hyper-géométriques décrites ici :

$$\begin{cases}(1-z)F_j'(z)=\left(\gamma+\delta-\alpha-1-\frac{\gamma+j-1}{z}\right)F_j(z)+\frac{\gamma+j-2}{z}F_{j-1}(z)\\ \Leftrightarrow(1-z)F_j'(z)=\left(\beta-\varepsilon-\frac{\gamma+j-1}{z}\right)F_j(z)+\frac{\gamma+j-2}{z}F_{j-1}(z)\\ z(z-1)F_j'(z)=-(\alpha+j)\ z\ F_j(z)+\frac{(\alpha+j)(\gamma+j-(\gamma+\delta-\alpha-1))}{\gamma+j}\ z\ F_{j+1}(z)\\ \Leftrightarrow z(z-1)F_j'(z)=-(\alpha+j)\ z\ F_j(z)+\frac{(\alpha+j)(\gamma+j-\beta+\varepsilon)}{\gamma+j}\ z\ F_{j+1}(z)\end{cases}$$

On parvient à la relation de récurrence à trois termes suivantes :

$$\begin{cases} A_j c_{j-1} + \left(B_j - q\right) c_j + C_j c_{j+1} = 0 \\ A_j = \dfrac{(j+\alpha-1)(j+\alpha-\delta)(j+\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{j+\gamma-1} = \dfrac{(j+\alpha-1)(j+\alpha-\delta)(j+\varepsilon-1)}{j+\gamma-1} \\ B_j = -j^2(a+1) - j\left(a(2\alpha+1-\gamma-\delta)+\alpha+\beta-\delta\right) - a\alpha(\alpha+1-\gamma-\delta) = -j^2(a+1) - j\left(a(\alpha+\varepsilon-\beta)+\alpha+\beta-\delta\right) - a\alpha(\alpha+\varepsilon-\beta) \\ = -j(j+\alpha+\beta-\delta) - a(j+\alpha)(j+1+\alpha-\gamma-\delta) = j^2 - (j+1+\alpha+\beta-\delta)(j(1+a)+a\alpha) = j^2 - (j+\gamma+\varepsilon)(j(1+a)+a\alpha) \\ = -j(j+\gamma+\varepsilon-1) - a(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon) \\ C_j = a(j+1)(j+\gamma) \end{cases}$$

Les dérivées premières et secondes des développements hyper-géométriques de Figueiredo sont les suivantes :

$$y(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \, z^j \times {}_2F_1(\alpha+j, \beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)$$

$$y'(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j \left(z^j \times \frac{(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)\times{}_2F_1(\alpha+j+1, \beta-\varepsilon+1\,;\gamma+j+1\,;z)}{\gamma+j} + j\,z^{j-1}\times{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)\right)$$

$$y''(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(\begin{array}{l} c_j\, z^j \times \dfrac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)(\beta-\varepsilon)(\beta-\varepsilon+1)\times{}_2F_1(\alpha+j+2,\beta-\varepsilon+2\,;\gamma+j+2\,;z)}{(\gamma+j)(\gamma+j+1)} + \\ +2\,j\,z^{j-1}\times\dfrac{(\alpha+j)(\beta-\varepsilon)\times{}_2F_1(\alpha+j+1,\beta-\varepsilon+1\,;\gamma+j+1\,;z)}{\gamma+j} + \\ + j(j-1)z^{j-2}\times{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z) \end{array} \right)$$

A partir de ces expressions à défaut de me pencher théoriquement sur la convergence de la série, j'ai au moins essayer d'étudier numériquement cette même convergence pour divers paramètres.

<u>Développement limité à gauche à partir de j=0</u>

Les conditions pour que la récurrence s'arrête en j=0 (annulation du terme C_{-1}) sont assurées, sachant que pour la valeur $\gamma=1$, la récurrence n'est plus respectée car l'expression $A_0 c_{-1}$ dans la relation à trois termes $j=0 \quad A_0 c_{-1} + (B_0 - q)c_0 + C_0 c_1 = 0$ devient une forme indéterminée $A_0 c_{-1} = \frac{0}{0}$.

Dans ces conditions on complète la récurrence à trois termes par ses conditions de départ :

$$\gamma \neq 1 \quad \begin{cases} A_j c_{j-1} + \left(B_j - q\right)c_j + C_j c_{j+1} = 0 \\ c_{-1} = 0 \quad c_0 = 1 \\ A_j = \dfrac{(j+\alpha-1)(j+\alpha-\delta)(j+\varepsilon-1)}{j+\gamma-1} \\ B_j = -j(j+\gamma+\varepsilon-1) - a(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon) \\ C_j = a(j+1)(j+\gamma) \end{cases}$$

<u>Nota.Bene :</u> avec cette condition de départ de la récurrence, la normalisation de solution de Figueiredo est alors la suivante : $y(0) = c_0 = 1$.

Cas particulier pour γ=-N

Dans la récurrence à trois termes le terme C_j s'annule également lorsque j=N et γ=-N. Alors la récurrence se trouverait limitée à tous les indices à droite j>N. Mais la récurrence n'est pour autant pas respectée lors des conditions de départ. L'expression $A_{N+1}c_N = \frac{(N+1+\alpha-1)(N+1+\alpha-\delta)(N+1+\varepsilon-1)}{N+1-N-1}c_N = \frac{0}{0}$ devient une forme indéterminée. Ainsi il convient de bannir le développement de Figueiredo pour le cas γ=-N, N>=0, et nous avons vu auparavant que c'était également le cas pour γ=1.

Convergence numérique du développement hyper-géométrique de Figueiredo

Sur ce schéma de récurrence j'ai étudié à partir de quelques valeurs de paramètres si la série convergeait ou non.

Sachant que les coefficients sont le résultat du système d'équations linéaires suivant :

$$A_j c_{j-1} + (B_j - q)c_j + C_j c_{j+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} B_0-q & C_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ A_1 & B_1-q & C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & B_2-q & C_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1}-q & C_{N-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N & B_N-q & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Deux choix sont possibles pour la détermination des valeurs de q : soit la valeur de q est quelconque et l'on doit s'assurer que la série converge, soit les valeurs de q sont choisies parmi les valeurs propres de la matrice « infinie » reproduite ainsi :

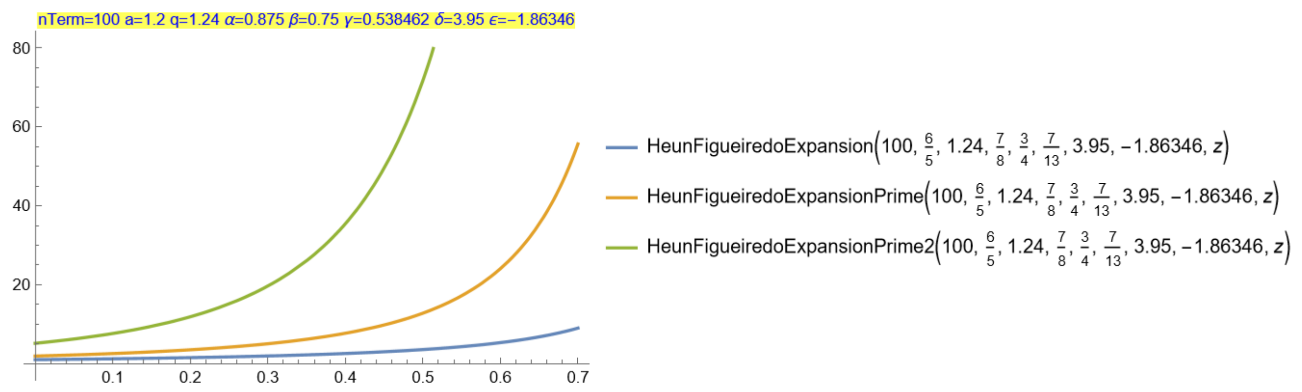
$$\begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N & B_N & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Dans le deuxième choix il suffit de déterminer le spectre des valeurs propres sur une version limitée de la matrice restreinte à une taille M suffisamment grande. En théorie lorsque M est fixé q est racine d'une équation polynomiale de degré M+1 et la solution est par nature fini. Mais M étant très grand c'est une bonne approximation d'une série infinie.

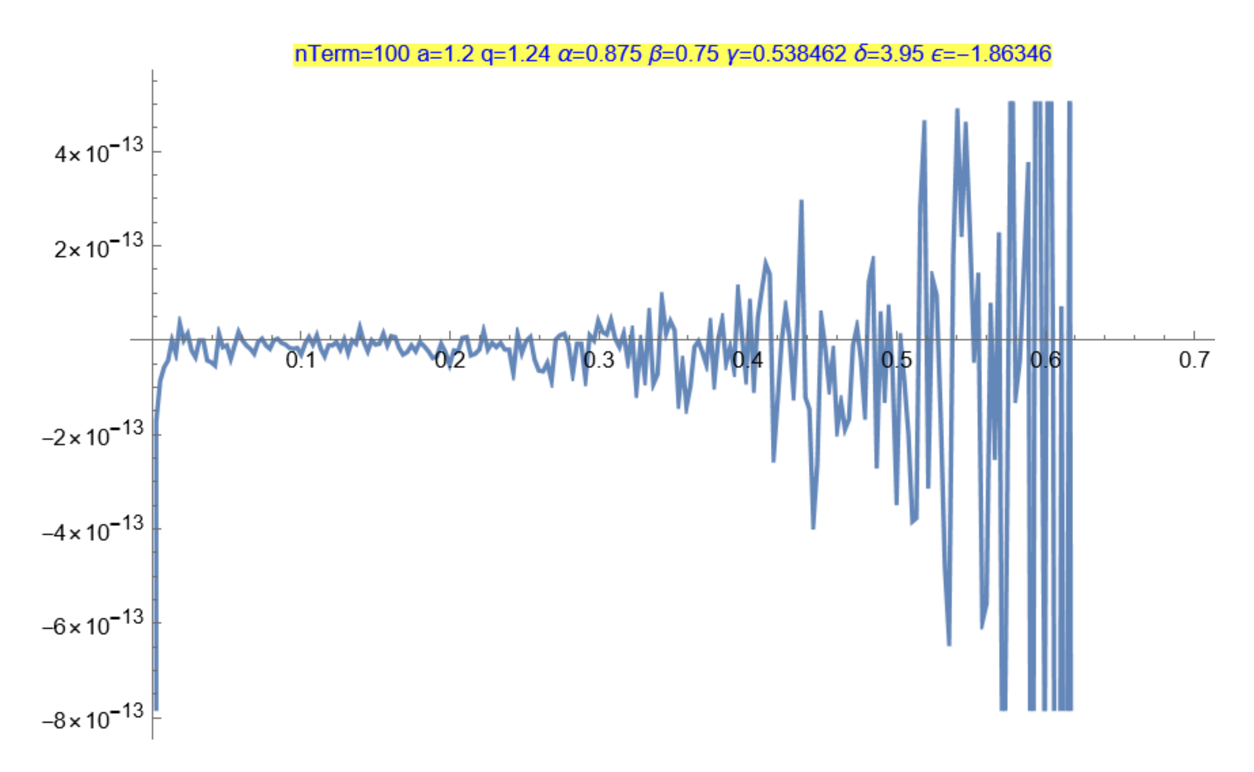
Nota.Bene : Si q est quelconque le développement est infini, mais il converge tout de même numériquement contrairement à toutes simulations effectuées sur les développements infinis d'Ishkhanyan de type (II.3) (voir plus loin) qui eux ne convergent jamais.

Voici quelques exemples illustratifs des graphes de développement obtenus à l'aide de Mathematica :

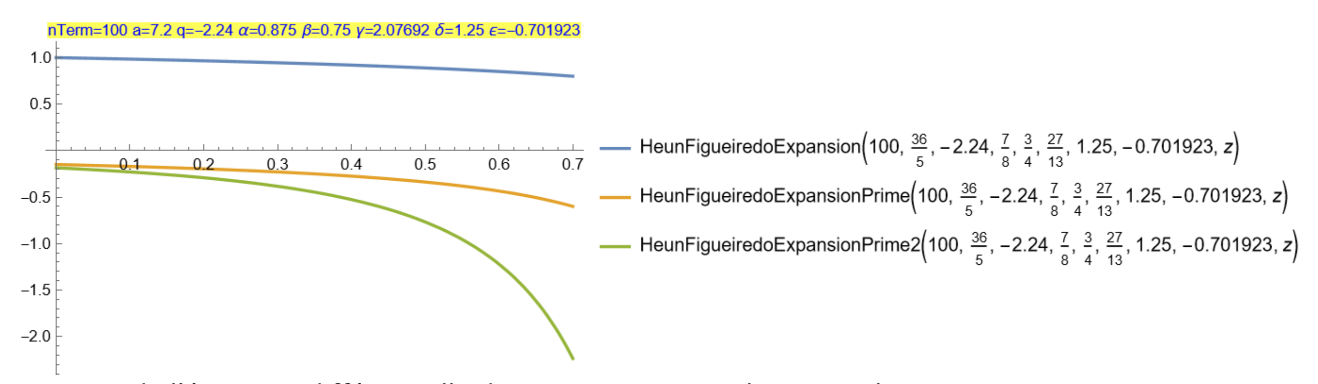
Fonction et dérivées première et seconde pour une valeur q quelconque :



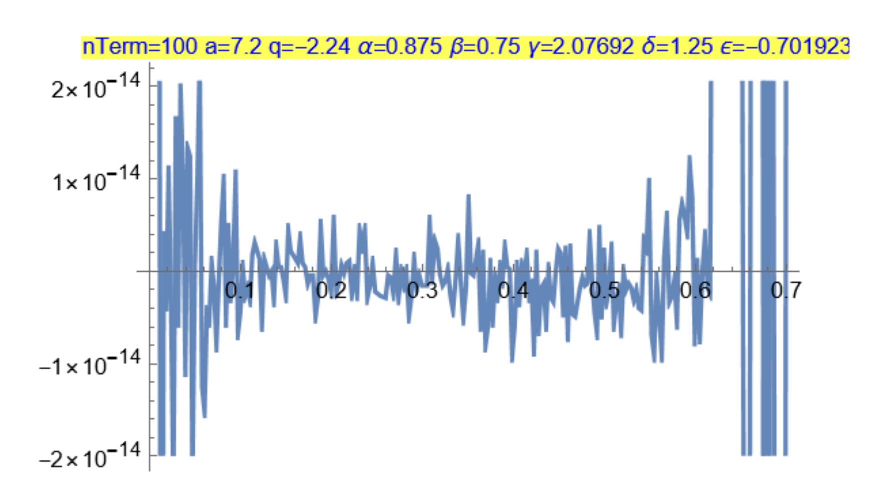
Respect de l'équation différentielle de Heun pour une valeur q quelconque :



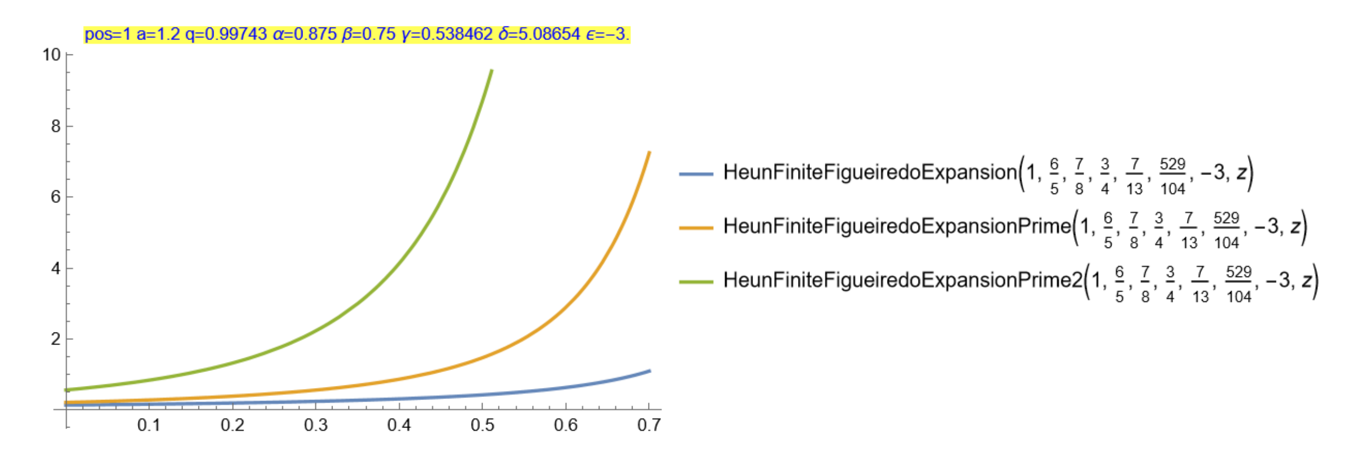
Fonction et dérivées première et seconde pour une valeur q quelconque :



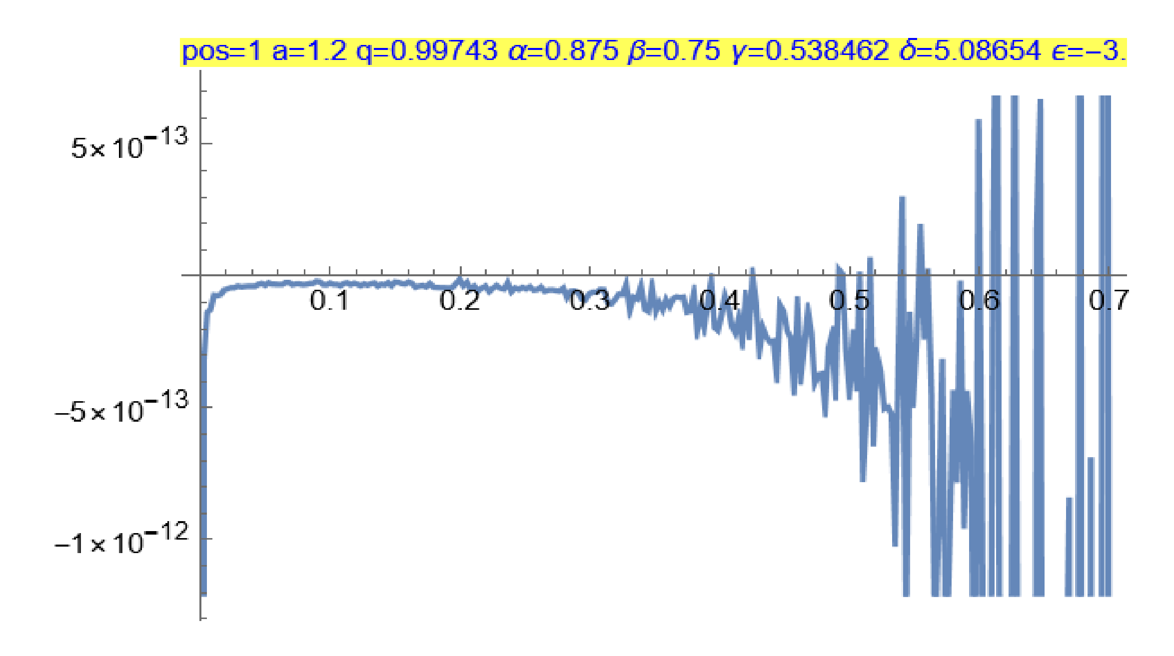
Respect de l'équation différentielle de Heun pour une valeur q quelconque :



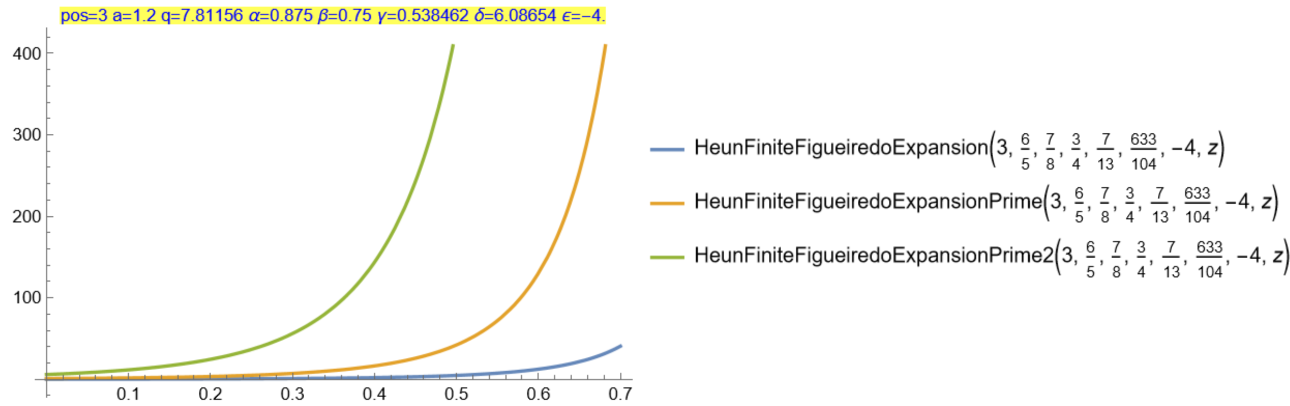
Fonction et dérivées première et seconde dans le cas d'un développement fini de Figueiredo (voir plus loin ε=-3) pour une valeur q égale à la première des valeurs propres ordonnées de manière croissante :



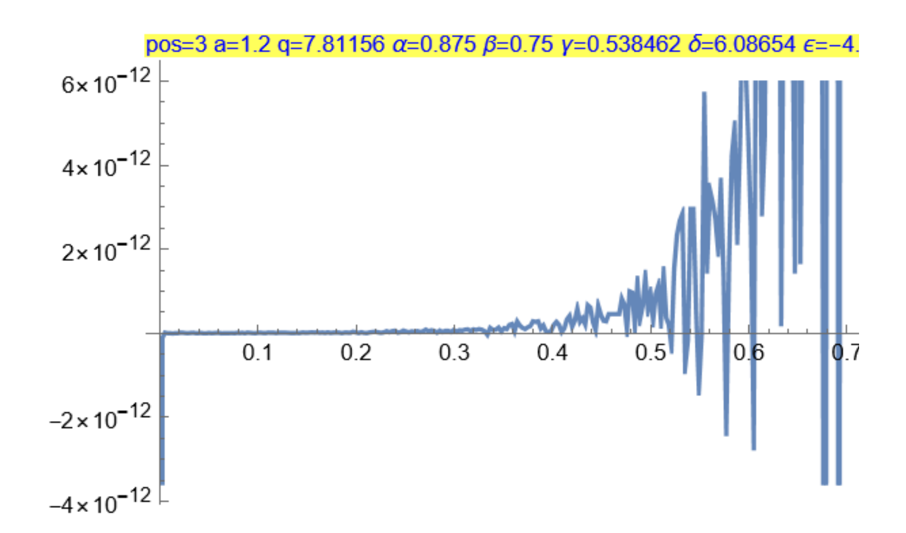
Respect de l'équation différentielle de Heun dans le cas d'un développement fini de Figueiredo (voir plus loin ε=-3) pour une valeur q égale à la première des valeurs propres ordonnées de manière croissante :



Fonction et dérivées première et seconde dans le cas d'un développement fini de Figueiredo (voir plus loin ε=-4) pour une valeur q égale à la troisième des valeurs propres ordonnées de manière croissante :



Respect de l'équation différentielle de Heun dans le cas d'un développement fini de Figueiredo (voir plus loin ε=-4) pour une valeur q égale à la troisième des valeurs propres ordonnées de manière croissante :



Je vais maintenant décrire justement les conditions pour lesquels le développement de Figueiredo est fini.

Développement limité à droite, série finie de Figueiredo, comparaison avec les développements finis d'Ishkhanyan de type (II.3)

La condition pour que le développement soit fini est que le terme A de la récurrence s'annule à son tour pour une valeur donnée N+1 de l'indice j soit :

$$A_{N+1} = \frac{(\alpha+N)(\alpha-\delta+N+1)(\varepsilon+N)}{\gamma+j-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -N \\ ou \\ \delta-\alpha = N+1 \\ ou \\ \varepsilon = -N \end{cases}$$

Pour α=-N, il vient :

$$y(z) = \sum_{j=0}^{j=N} c_j\, z^j \times {}_2F_1(-N+j, \gamma+\delta+N\,;\gamma+j\,;z)$$

$$\text{Relation de Fuchs} \quad \alpha+\beta+1 = \gamma+\delta+\varepsilon \to \gamma+\delta-\alpha = \beta+1-\varepsilon$$

$$\begin{cases} A_j c_{j-1} + (B_j - q)c_j + C_j c_{j+1} = 0 \\ A_j = \dfrac{(j-N-1)(j-N-\delta)(\varepsilon-1+N)}{\gamma+j-1} \\ B_j = -j^2(a+1) - j(a(\varepsilon-\beta-N) + \beta-\delta-N) + aN(\varepsilon-\beta-N) \\ = -j(j+\beta-\delta-N) - a(j-N)(j+1+\beta-\delta-N) \\ C_j = a(j+1)(\gamma+j) \end{cases}$$

Il se trouve que ce sont en réalité des solutions polynomiales puisque la fonction hypergéométrique dans le développement fini est elle-même un polynôme et que dans ces conditions elles sont assimilables aux polynômes de Heun.

Pour δ-α=N+1, il vient :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=N}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\alpha+j,\gamma+N+1\,;\gamma+j\,;z)$$

$$\text{Relation de Fuchs}\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon\rightarrow\beta=\gamma+\varepsilon+N$$

$$\begin{cases}A_jc_{j-1}+\left(B_j-q\right)c_j+C_jc_{j+1}=0\\ A_j=\dfrac{(\alpha-1+j)(j-N-1)(\varepsilon-1+N)}{\gamma+j-1}\\ B_j=-j^2(a+1)-j(a(\alpha+\varepsilon-\beta)+\beta-N-1)-a\alpha(\alpha+\varepsilon-\beta)\\ =-j(j+\beta-N-1)-a(j+\alpha)(j+\beta-N)\\ C_j=a(j+1)(\gamma+j)\end{cases}$$

Il se trouve que dans le développement fini la fonction hyper-géométrique est elle-même assimilables à un polynôme moyennant une transformation connue des fonctions hyper-géométriques :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=N}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\alpha+j,\gamma+N+1\,;\gamma+j\,;z)=\sum_{j=0}^{j=N}c_j\ z^j\times{}_2F_1(\gamma+N+1,\alpha+j\,;\gamma+N+1+(j-N-1);z)$$

$$Or\quad {}_2F_1(a,b\,;c\,;z)=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b\,;c\,;z)\quad\rightarrow\quad {}_2F_1(a,b\,;a+l\,;z)=(1-z)^{l-b}{}_2F_1(l,a-b+l\,;a+l\,;z)$$

$$\begin{cases}a=\gamma+N+1\\ b=\alpha+j\qquad\Rightarrow{}_2F_1(\gamma+N+1,\alpha+j\,;\gamma+N+1+(j-N-1);z)=(1-z)^{-N-1-\alpha}{}_2F_1(j-N-1,\gamma-\alpha\,;\gamma+j\,;z)\\ l=j-N-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(z)=\sum_{j=0}^{j=N}c_j\ (1-z)^{-N-1-\alpha}z^j\times{}_2F_1(j-N-1,\gamma-\alpha\,;\gamma+j\,;z)$$

Dans ces conditions le développement est encore une fois assimilable aux solutions dîtes polynomiales de Heun.

Dans les deux cas α=-N et δ-α=N+1, la condition d'existence de la solution se ramène à une contrainte sur la valeur de q qui doit être racine d'une équation algébrique polynomiale. Mais comme ces deux cas sont assimilables à des polynômes de Heun, le type d'équation polynomiale en q est déjà connu.

Pour ε=-N il n'en est pas de même, car les fonctions hyper-géométriques de base ne sont pas assimilables à un polynôme. La récurrence est de la forme :

$$y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j\ z^j \times {}_2F_1(\alpha+j,\beta+N\,;\gamma+j\,;z)$$

$$\begin{cases} A_j c_{j-1}+\left(B_j-q\right)c_j+C_j c_{j+1}=0 \\ A_j=\dfrac{(j+\alpha-1)(j+\alpha-\delta)(j-N-1)}{j+\gamma-1} \\ B_j=-j(j+\gamma-N-1)-a(j+\alpha)(j-\beta+N) \\ C_j=a(j+1)(j+\gamma) \end{cases}$$

et les coefficients c_j sont solutions d'un système linéaire fini d'ordre N+1 :

$$A_j c_{j-1}+\left(B_j-q\right)c_j+C_j c_{j+1}=0$$

$$\begin{bmatrix} B_0-q & C_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_1 & B_1-q & C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & B_2-q & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1}-q & C_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N & B_N-q \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dès lors que ce développement est fini, cela signifie que le déterminant associé du système linéaire des coefficients c_j doit s'annuler, soit :

$$Det\left(\begin{bmatrix} B_0-q & C_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_1 & B_1-q & C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & B_2-q & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1}-q & C_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_N & B_N-q \end{bmatrix}\right)=0$$

Ce qui détermine donc q comme racines d'un polynôme de degré N+1. Par exemple le cas le plus simple étant N=0 pour une seule équation linéaire, il vient trivialement :

$$j=0 \Rightarrow B_0=a\,\alpha\,\beta \qquad M=\left[B_0-q\right] \Rightarrow Det(M)=0 \Leftrightarrow q=B_0=a\,\alpha\,\beta$$

C'est le cas classique de dégénérescence de l'équation de Heun vers l'équation hyper-géométrique

Pour N=1, le polynôme en q s'exprime comme suit :

$$q^2 - q\left(1-\gamma + a\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)\right) + a\,\alpha\,\beta\left(\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-\gamma\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(q - a\,\alpha\,\beta + a\left(1-\delta\right)\right)\left(q - a\,\alpha\,\beta + \left(a-1\right)\left(1-\gamma\right)\right) - a\left(1-a\right)\left(1+\alpha-\gamma\right)\left(1+\beta-\gamma\right)=0$$

Pour N=2, le polynôme en q s'exprime comme suit :

$$\left(\left(q-a\,\alpha\,\beta\right)^2 + \left(q-a\,\alpha\,\beta\right)\left(4a - a\left(3+\alpha+\beta\right)-2+\gamma\right)+2\,a\left(a-1\right)\alpha\,\beta\right)\times$$
$$\times\left(q-a\,\alpha\,\beta - 2a\left(1+\alpha+\beta\right)-2+2\gamma\right)+2\,a\left(a-1\right)\left(q-a\,\alpha\,\beta\right)\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)=0$$

J'ai vérifié plusieurs expressions du polynôme dont les valeurs admissibles de q sont racines, pour des valeurs N plus grandes. Il se trouve que c'est exactement le même polynôme que pour les développements hyper-géométriques finis d'Ishkhanyan construits ainsi :

$$\varepsilon=-N \qquad \begin{cases} y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j^{(II.3)}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z\right) \\ A_j^{(II.3)}c_{j-1}^{(II.3)}+\left(B_j^{(II.3)}-q\right)c_j^{(II.3)}+C_j^{(II.3)}c_{j+1}^{(II.3)}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_j^{(II.3)}=\dfrac{a\left(\alpha-\gamma+N-j+1\right)\left(\beta-\gamma+N-j+1\right)\left(N-j+1\right)}{\gamma-N+j-1} \\ B_j^{(II.3)}=a\,\alpha\,\beta+j\left(a-1\right)\left(\gamma-N+j-1\right)+a\left(N-j\right)\left(\alpha+\beta-\gamma+N-j\right) \\ C_j^{(II.3)}=-\left(a-1\right)\left(\gamma-N+j\right)\left(j+1\right) \end{cases}$$

De même les fonctions sont strictement proportionnelles l'une de l'autre pour diverses valeurs testées des paramètres. On peut légitimement se poser la question de la similitude des développements finis et conjecturer que ces derniers sont par nature identiques :

Figueiredo

$$\varepsilon=-N \quad y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} c_j\ z^j\times{}_2F_1\left(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z\right)$$

$$\begin{cases} c_{-1}=0 \quad c_0=1\Rightarrow y(0)=1 \\ A_jc_{j-1}+\left(B_j-q\right)c_j+C_jc_{j+1}=0 \\ A_j=\dfrac{\left(j+\alpha-1\right)\left(j+\alpha-\delta\right)\left(j-N-1\right)}{j+\gamma-1} \\ B_j=-j\left(j+\gamma-N-1\right)-a\left(j+\alpha\right)\left(j-\beta-N\right) \\ C_j=a\left(j+1\right)\left(j+\gamma\right) \end{cases}$$

Iskhanyan $(II.3)$

$$\varepsilon=-N \quad y(z)=\sum_{j=0}^{j=N} \tilde{c}_j^{(II.3)}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma+\varepsilon+j;z\right)$$

$$\begin{cases} c_{-1}=0 \quad c_0=1 \\ A_j^{(II.3)}c_{j-1}^{(II.3)}+\left(B_j^{(II.3)}-q\right)c_j^{(II.3)}+C_j^{(II.3)}c_{j+1}^{(II.3)}=0 \\ A_j^{(II.3)}=-\dfrac{a\left(j+\gamma-\alpha-N-1\right)\left(j+\gamma-\beta-N-1\right)\left(j-N-1\right)}{j+\gamma-N-1} \\ B_j^{(II.3)}=a\,\alpha\,\beta+j\left(a-1\right)\left(\gamma-N+j-1\right)+a\left(N-j\right)\left(\alpha+\beta-\gamma+N-j\right) \\ C_j^{(II.3)}=-\left(a-1\right)\left(j+1\right)\left(j+\gamma-N\right) \\ \tilde{c}_j^{(II.3)}=\dfrac{c_j^{(II.3)}}{\sum_{l=0}^{l=N}c_l^{(II.3)}}\Rightarrow y(0)=1 \end{cases}$$

<u>Quelques expressions simples des développements de Figueiredo et d'Ishkhanyan de type (II.3), normalisation y(0)=1</u>

Développement d'Ishkhanyan de type (II.3)

Pour N=1, il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon=-1 \quad q \quad \text{racines de} \quad q^2-q\left(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta)\right)+a\,\alpha\,\beta\left((1+\alpha)(1+\beta)-\gamma\right)=0 \\ y(z)=\dfrac{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+c_1\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)}{1+c_1} \qquad c_1=\dfrac{q-a\,\alpha\,\beta+a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-1)} \end{cases}$$

Pour N=2, il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon=-2 \quad q \quad \text{racines de} \quad \left((q-a\,\alpha\,\beta)^2+(q-a\,\alpha\,\beta)\left(4a-a(3+\alpha+\beta)-2+\gamma\right)+2\,a\,(a-1)\alpha\,\beta\right)\times \\ \times\left(q-a\,\alpha\,\beta-2a(1+\alpha+\beta)-2+2\gamma\right)+2\,a\,(a-1)(q-a\,\alpha\,\beta)(1+\alpha)(1+\beta)=0 \\ y(z)=\dfrac{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-2;z)+c_1\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+c_2\;{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)}{1+c_1+c_2} \\ c_1=\dfrac{q-a\,\alpha\,\beta+2a\,(1-\delta)}{(1-a)(\gamma-2)} \qquad c_2=\dfrac{\begin{Bmatrix} q(\gamma-2+q)-a\left(\alpha\,\beta\,\gamma+q(\alpha+\beta+2\alpha\,\beta+2\delta-3)\right)+ \\ +a^2\left(\alpha\,\beta\left((1+\alpha)(1+\beta)+2(\delta-1)\right)+2(\delta-1)(\delta-2)\right) \end{Bmatrix}}{2(a-1)^2(\gamma-1)(\gamma-2)} \end{cases}$$

Développement de Figueiredo

Pour N=1, il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon=-1 \quad q \quad \text{racines de} \quad q^2-q\left(1-\gamma+a(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta)\right)+a\,\alpha\,\beta\left((1+\alpha)(1+\beta)-\gamma\right)=0 \\ y(z)={}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+c_1\,z\;{}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z) \qquad c_1=\dfrac{q-a\,\alpha\,(1+\beta)}{a\,\gamma} \end{cases}$$

Pour N=2, il vient :

$$\begin{cases} \varepsilon=-2 \quad q \quad \text{racines de} \quad \left((q-a\,\alpha\,\beta)^2+(q-a\,\alpha\,\beta)\left(4a-a(3+\alpha+\beta)-2+\gamma\right)+2\,a\,(a-1)\alpha\,\beta\right)\times \\ \times\left(q-a\,\alpha\,\beta-2a(1+\alpha+\beta)-2+2\gamma\right)+2\,a\,(a-1)(q-a\,\alpha\,\beta)(1+\alpha)(1+\beta)=0 \\ y(z)={}_2F_1(\alpha,\beta+2;\gamma;z)+c_1\,z\;{}_2F_1(\alpha+1,\beta+2;\gamma+1;z)+c_2\,z^2\;{}_2F_1(\alpha+2,\beta+2;\gamma+2;z) \\ c_1=\dfrac{q-a\,\alpha\,(2+\beta)}{a\,\gamma} \qquad c_2=\dfrac{q^2-q\left(2-\gamma+a(1+3\alpha+\beta+2\alpha\beta)\right)+a\alpha\left(2\alpha+a(1+\alpha)(1+\beta)(2+\beta)+\beta(2-\gamma)-2(\gamma+\delta-3)\right)}{2a^2\gamma(1+\gamma)} \end{cases}$$

Une méthode non formelle pour évaluer l'équivalence entre les deux développements

Le cas N=0, une seule fonction de base identique pour les deux développements :

$$f_0^{(IshkhanyanII.3)}(z) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = f_0^{(Figueiredo)}(z)$$

Le cas N=1 comporte deux jeux de deux fonctions de base :

$$f_i^{(IshkhanyanII.3)}(z) = \{{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z), {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\}$$
$$f_0^{(Figueiredo)}(z) = \{{}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma;z), z\ {}_2F_1(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)\}$$

Plus généralement ayant les deux jeux de fonctions de base hyper-géométriques :

$$f_i^{(IshkhanyanII.3)}(z) = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-N+i;z) \quad i=0,\dots,N$$
$$f_i^{(Figueiredo)}(z) = z^i \times {}_2F_1(\alpha+i,\beta+N\,;\gamma+i\,;z) \quad i=0,\dots,N$$

Pour chaque valeur de N on peut évaluer le Wronskien du jeux des fonctions de base d'Iskhanyan avec les fonctions de base de Figueiredo une à une. On a ainsi démontrer pour une valeur particulière N que l'une quelconque des fonctions de base de Figueiredo est combinaison linéaire des fonctions de base d'Iskhanyan. Soit l'algorithme suivant :

Pour $i=0,\dots,N \quad f(z) \notin \{\ ,\ \}$

   Si $\quad Wronskien\{f_0^{(IshkhanyanII.3)}(z),\dots,f_N^{(IshkhanyanII.3)}(z), f_i^{(Figueiredo)}(z)\} = 0$ *Alors*

      $f_i^{(Figueiredo)}(z)$ *est combinaison linéaire des* $f_0^{(IshkhanyanII.3)}(z),\dots,f_N^{(IshkhanyanII.3)}(z)$

   Fin Si

Fin Pour

A l'aide de Mathematica, j'ai pu prouver l'assertion pour N=1 et N=2. Pour N=3, les expressions formelles des Wronskiens ont été obtenues et les graphes tracés avec des paramètres α,β,γ donnés sur l'intervalle z€[0,0.7] montrant des valeurs infinitésimales qui tendent bien à prouver que le Wronskien théorique est nul. Il en est de même pour N=4 et N=5, au delà les calculs réalisés par Mathematica deviennent trop long.

<u>Équivalence des développements finis de Figueiredo avec une fonction hyper-géométrique généralisée</u>

Étant donné que les développement finis de Figueiredo sont équivalents à ceux d'Ishkhanyan de type (II.3), on peut également signaler son équivalence avec des fonctions hyper-géométriques généralisées.

Rappelons la méthode de construction : partons de la récurrence à trois termes du développement classique de Fröbenius autour de z=0 : $\begin{cases} A_j = (\alpha + j - 1)(\beta + j - 1) \\ B_j = -j\,(j\,(1+a) + N\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) - q \\ C_j = a\,(j+1)(\gamma + j) \end{cases}$ $\quad \dfrac{A_j}{h_j} + B_j + C_j h_{j+1} = 0$*. En identifiant les rapports de coefficients du développement de la fonction généralisée hypergéométrique* $y(z) = {}_{N+2}F_{N+1}(\alpha, \beta, e_1+1, \ldots, e_N+1 \,;\, \gamma, e_1, \ldots, e_N \,;\, z)$ *soit* $h_j = \dfrac{c_j}{c_{j-1}} = \dfrac{1}{j} \times \dfrac{(\alpha + j - 1)(\beta + j - 1)}{(\gamma + j - 1)} \times \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l + j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l + j - 1)}$*, on obtient une équation algébrique de degré N+2 en j, qui par annulation de chaque terme de puissance de j donne un système de N+3 équations algébriques, dont celle de puissance 0 donne invariablement l'expression :* $q = a\,\alpha\,\beta \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l + 1)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l}$*. En introduisant les paramètres symétriques* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *:* $s_0 = 1 \quad s_1 = \sum_{l=1}^{l=N} e_l \quad s_2 = \sum_{i,j=1, i>j}^{i,j=N} e_i e_j \quad \ldots \quad s_{N-1} = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1, i_1>\ldots>i_{N-1}}^{i_1,\ldots,i_N} e_{i_1} \times \ldots \times e_{i_{N-1}} \quad s_N = \prod_{l=1}^{l=N} e_l$*, on linéarise le système initial d'équations algébriques. L'équation algébrique de degré N+2 en j est la suivante :*

$$j\,(\gamma + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l - (j\,(j\,(1+a) + N\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) + q) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + a\,(\alpha + j)(\beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l = 0$$

Comme les degrés N+2 et N+1 de cette équation algébrique s'annulent (du terme en N+1 on déduit la contrainte : $\varepsilon = -N$*), elle est en réalité une équation de degré N en j. L'annulation de tous les termes de puissance de j aboutit à un système de N+1 équations linéaires dans les variables* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *. Les N premières équations servent à déterminer* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *en fonction des paramètres a,q,α,β,γ,N :* $s_j = g_j(\alpha, \beta, \gamma, a, q, N) \quad j = 1, \ldots, N$*. La N+1-ième équation linéaire détermine également une valeur* $a = f_N(s_1, s_2, \ldots, s_N)$*. Si dans cette dernière expression de la N+1-ième équation linéaire on injecte les valeurs* $s_j = g_j(\alpha, \beta, \gamma, a, q, N) \quad j = 1, \ldots, N$*, alors on parvient à factoriser le polynôme caractéristique en q du développement de Figueiredo, qui est également le même que celui d'Ishkhanyan. C'est donc bien un système linéaire de N équations à N inconnus* $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$*, si on le développe formellement comme un système à N+1 inconnus* $(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_N)$*, comme suit :*

$$P_N(j) = j\,(\gamma + j - 1)\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j-1)^l - (j\,(j\,(1+a) + N\,(a-1) + a\,(\alpha+\beta) + \gamma - 1) + q) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + a\,(\alpha + j)(\beta + j) \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}(j+1)^l$$

$$P_N(j) = \sum_{l=0}^{l=N} E_j\, j^l \qquad E_j = \sum_{l=0}^{l=N} e_{j,l}\, s_l \Rightarrow P_N(j) = 0 \Leftrightarrow [e_{j,l}].[s_l] = 0$$

Le système linéaire devient homogène et dans ces conditions les conditions pour une solution non-triviale, il convient d'annuler le déterminant de la matrice : $Det(|e_{j,l}|) = 0$*. Ce qui conduit à ce que q soit racine d'un polynôme d'ordre N+1.*

Ce dernier peut être déterminé d'une autre façon en repartant de la récurrence de Figueiredo, soit par l'annulation du déterminant suivant :

$$\begin{cases} A_j = \dfrac{(j+\alpha-1)(j+\alpha-\delta)(j-N-1)}{j+\gamma-1} \\ B_j = -j(j+\gamma-N-1) - a(j+\alpha)(j-\beta+N) \\ C_j = a(j+1)(j+\gamma) \end{cases} \quad Det\left(\begin{bmatrix} B_0-q & C_0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ A_1 & B_1-q & C_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & B_2-q & C_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1}-q & C_{N-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & A_N & B_N-q \end{bmatrix}\right) = 0$$

La dernière étape consiste à revenir aux variables e_i depuis les produits symétriques . Il suffit pour cela d'utiliser la formule du polynôme de Vieta : $s_0 = 1, s_j \quad j = 1,\ldots,N \rightarrow Vieta(t,N) = \sum_{j=0}^{j=N} s_{N-j}(-1)^{N-j} t^j = \prod_{j=1}^{j=N}(t-e_j)$*. Par un programme numérique, il suffit donc de rechercher les N racines du polynôme de Vieta, calculé à partir des valeurs s_i pour obtenir toutes les N valeurs des variables e_i .*

Un cas particulier de récurrence à deux termes lié au développement de Figueiredo

Calquons la récurrence à deux termes sur celle des coefficients du développement autour de z=0 de des fonctions généralisées hypergéométriques suivantes :

- *choix 1 :* $_{N+2}F_{N+1}(\alpha,\varepsilon,e_1+1,\ldots,e_N+1\,;\gamma,e_1,\ldots,e_N\,;z)$
- *choix 2 :* $_{N+2}F_{N+1}(\alpha,\gamma+\varepsilon-\beta,e_1+1,\ldots,e_N+1\,;\gamma,e_1,\ldots,e_N\,;z)$
- *choix 3 :* $_{N+2}F_{N+1}(\varepsilon,\gamma+\varepsilon-\beta,e_1+1,\ldots,e_N+1\,;\gamma,e_1,\ldots,e_N\,;z)$

Selon les trois choix, le rapport entre deux coefficients successifs est le suivant :

$$h_0=\infty\Leftrightarrow\frac{1}{h_0}=0\quad et\quad\begin{cases}1)\quad h_j=\dfrac{c_j}{c_{j-1}}=\dfrac{1}{j}\times\dfrac{(j+\alpha-1)(j+\varepsilon-1)}{(j+\gamma-1)}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}\\ 2)\quad h_j=\dfrac{c_j}{c_{j-1}}=\dfrac{1}{j}\times\dfrac{(j+\alpha-1)(j+\gamma+\varepsilon-\beta-1)}{(j+\gamma-1)}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}\\ 3)\quad h_j=\dfrac{c_j}{c_{j-1}}=\dfrac{1}{j}\times\dfrac{(j+\varepsilon-1)(j+\gamma+\varepsilon-\beta-1)}{(j+\gamma-1)}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}\end{cases}$$

Et que l'on injecte dans la récurrence de Figueiredo sous la forme suivante :

$$\begin{cases}y(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}c_j\,z^j\,{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z)\\ A_jc_{j-1}+(B_j-q)c_j+C_jc_{j+1}=0\\ A_j=\dfrac{(j+\alpha-1)(j+\gamma+\varepsilon-\beta-1)(j+\varepsilon-1)}{j+\gamma-1}\\ B_j=-j\,(j+\gamma+\varepsilon-1)-a\,(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon)\\ C_j=a\,(j+1)(j+\gamma)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}B_0+C_0h_1=0\\ \dfrac{A_j}{h_j}+B_j+C_jh_{j+1}=0\quad pour\quad j>0\end{cases}$$

Comme auparavant utilisons les produits symétriques s_i des paramètres e_i et leur linéarisation :

$$\begin{cases}s_1=\sum_{l=1}^{l=N}e_l\qquad s_2=\sum_{i,j=1,i>j}^{i,j=N}e_ie_j\qquad s_3=\sum_{i,j,k=1,i>j>k}^{i,j=N}e_ie_je_k\\ \ldots\\ s_{N-1}=\sum_{i_1,\ldots,i_N=1,i_1>\ldots>i_{N-1}}^{i_1,\ldots,i_N}e_{i_1}\times\ldots\times e_{i_{N-1}}\qquad s_N=\prod_{l=1}^{l=N}e_l\end{cases}\Rightarrow\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l\qquad\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l$$

Toujours selon les trois choix, les rapports de deux coefficients successifs donnent :

$$1)\quad \frac{A_j}{h_j}=\frac{j\,(j+\gamma+\varepsilon-\beta-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}\qquad C_jh_{j+1}=\frac{a\,(j+\alpha)(j+\varepsilon)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}$$

$$2)\quad \frac{A_j}{h_j}=\frac{j\,(j+\varepsilon-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}\qquad C_jh_{j+1}=\frac{a\,(j+\alpha)(j+\gamma+\varepsilon-\beta)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}$$

$$3)\quad \frac{A_j}{h_j}=\frac{j\,(j+\alpha-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}\qquad C_jh_{j+1}=\frac{a\,(j+\varepsilon)(j+\gamma+\varepsilon-\beta)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l}{\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l}$$

D'où une équation algébrique de degré N+2 en j pour tout indice j>=0 :

$$1)\quad j\,(j+\gamma+\varepsilon-\beta-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\left(-j\,(j+\gamma+\varepsilon-1)-a\,(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon)-q\right)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(j+\alpha)(j+\varepsilon)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

$$2)\quad j\,(j+\varepsilon-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\left(-j\,(j+\gamma+\varepsilon-1)-a\,(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon)-q\right)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(j+\alpha)(j+\gamma+\varepsilon-\beta)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

$$3)\quad j\,(j+\alpha-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\left(-j\,(j+\gamma+\varepsilon-1)-a\,(j+\alpha)(j-\beta+\varepsilon)-q\right)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(j+\varepsilon)(j+\gamma+\varepsilon-\beta)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

On vérifie aisément que le terme de degré N+2 de ces trois équations algébriques pour un indice j>0 s'annule. Le terme de degré N+1 doit également s'annuler, il vient donc une contrainte directe sur les paramètres pour les trois choix :

$$1)\quad Terme\quad j^{N+1}\rightarrow\beta+N=0\Rightarrow\beta=-N$$

$$2)\quad Terme\quad j^{N+1}\rightarrow\gamma+N=0\Rightarrow\gamma=-N$$

$$3)\quad Terme\quad j^{N+1}\rightarrow\beta-\delta+1+N=0\Rightarrow\beta-\delta+1=\gamma+\varepsilon-\alpha=-N$$

Le choix n°2 doit attirer notre attention car il introduit un pôle dans le développement de la récurrence à deux termes et nous avons vu précédemment qu'il fallait le bannir . Il reste donc deux choix :

$$1)\quad \beta=-N\rightarrow j\,(j+\gamma+\varepsilon+N-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\left(-j\,(j+\gamma+\varepsilon-1)-a\,(j+\alpha)(j+N+\varepsilon)-q\right)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(j+\alpha)(j+\varepsilon)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

$$2)\quad \beta-\delta+1=\gamma+\varepsilon-\alpha=-N\rightarrow\gamma+\varepsilon-\beta=\alpha-\beta-N\quad et\quad \gamma+\varepsilon-1=\alpha-N-1\quad et\quad \varepsilon-\beta=\alpha-\beta-\gamma-N\quad et\quad \varepsilon=\alpha-\gamma-N\quad et\quad \delta=\beta+1+N$$

$$\rightarrow j\,(j+\alpha-1)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\left(-j\,(j+\alpha-N-1)-a\,(j+\alpha)(j+\alpha-\beta-\gamma-N)-q\right)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}j^l+a\,(j+\alpha-\gamma-N)(j+\alpha-\beta-N)\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j+1)^l=0$$

Pour le deuxième choix, la contrainte supplémentaire sur les paramètres α,β,γ,δ,ε en plus de la relation de Fuchs conduit à réduire de deux les paramètres libres, soit par choix le jeux α,β,γ et l'entier N bien évidemment.

Quelque soient ces deux choix cela conduit à un système de N+1 équations linéaires selon les variables symétriques s_1 , …, s_N . L'une quelconque de ces équations est en trop (prenons celle du terme de degré N en j) . Elle sera automatiquement vérifiée par une condition d'annulation d'un polynôme en q de degré N+1, une fois qu'on lui injecte les solutions s_1 , …, s_N en fonction des paramètres a,q,α,β,γ,N obtenue par résolution du système linéaire de N premières équations (degré 0 à N-1 de l'équation algébrique en j).

Pour obtenir la condition sur le paramètre q, il suffit même d'écrire les équations linéaires selon les variables symétriques en ordre inverse s_N, s_{N-1} , …,s_1,s_0=1 :

$$\begin{cases} Terme \quad j^0 \to \sum_{l=0}^{l=N} d_{0,l} s_{N-l} = 0 \\ Terme \quad j^1 \to \sum_{l=0}^{l=N} d_{1,l} s_{N-l} = 0 \\ \ldots \\ Terme \quad j^N \to \sum_{l=0}^{l=N} d_{N,l} s_{N-l} = 0 \end{cases} \Rightarrow Det([d_{j,l}]) = 0$$

Seuls les éléments diagonaux de la matrice $[d_{j,l}]$ en question se présente sous la forme : $d_{j,j} = f_j(a,\alpha,\beta,\gamma,N) - q$. Les autres éléments non diagonaux sont uniquement fonctions des paramètres a,α,β,γ,N. Cela assure bien que l'annulation du déterminant donne une équation polynomiale de degré N+1 en q. Pour la valeur N=0 les trois choix donnent les équations polynomiales en q de degré 1 suivantes :

$$1) \quad N = 0 \quad s_0 = 1 \Rightarrow q - a\,\alpha\,\beta = 0 \quad Or \quad \beta = 0 \Rightarrow q = 0$$

$$2) \quad N = 0 \quad s_0 = 1 \Rightarrow q + a\,\alpha(\varepsilon - \beta) - a\,\varepsilon\,(\gamma + \varepsilon - \beta) = q - a\,\varepsilon\,\gamma + a(\alpha - \varepsilon)(\varepsilon - \beta) = 0 \quad Or \quad \beta - \delta + 1 = \gamma + \varepsilon - \alpha = 0 \Rightarrow q - a\,\gamma\,\beta = 0$$

Une fois déterminées les valeurs de s_N, s_{N-1} , …,s_1 , la forme du développement ainsi construit est la suivante :

$$c_{-1} = 0 \qquad c_0 = 1 \qquad y(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j\, z^j\, {}_2F_1(\alpha + j, \beta - \varepsilon\, ; \gamma + j\, ; z)$$

$$\begin{cases} 1) \quad h_j = \dfrac{c_j}{c_{j-1}} = \dfrac{1}{j} \times \dfrac{(j + \alpha - 1)(j + \varepsilon - 1)}{(j + \gamma - 1)} \times \dfrac{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} j^l + j^N}{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} (j-1)^l + (j-1)^N} \\ 2) \quad h_j = \dfrac{c_j}{c_{j-1}} = \dfrac{1}{j} \times \dfrac{(j + \varepsilon - 1)(j + \gamma + \varepsilon - \beta - 1)}{(j + \gamma - 1)} \times \dfrac{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} j^l + j^N}{s_N + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_{N-l} (j-1)^l + (j-1)^N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \quad c_j = \dfrac{1}{j!} \times \dfrac{\Gamma(\alpha + j)\Gamma(\varepsilon + j)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\varepsilon)} \times \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + j)} \times \dfrac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l}{s_N} = \dfrac{1}{j!} \times \dfrac{\Gamma(\alpha + j)\Gamma(\varepsilon + j)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\varepsilon)} \times \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + j)} \times \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N} (j + e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \\ 2) \quad c_j = \dfrac{1}{j!} \times \dfrac{\Gamma(\gamma + \varepsilon - \beta + j)\Gamma(\varepsilon + j)}{\Gamma(\gamma + \varepsilon - \beta)\Gamma(\varepsilon)} \times \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + j)} \times \dfrac{\sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} j^l}{s_N} = \dfrac{1}{j!} \times \dfrac{\Gamma(\gamma + \varepsilon - \beta + j)\Gamma(\varepsilon + j)}{\Gamma(\gamma + \varepsilon - \beta)\Gamma(\varepsilon)} \times \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + j)} \times \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N} (j + e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \end{cases}$$

En posant j=0 dans les trois équations algébriques cela équivaut à déterminer le terme de

puissance j^0, on peut montrer que quelque soit N, la valeur du produit : $\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l}$ *est invariablement égales à :*

$$1)\quad (-a\,\alpha(\varepsilon-\beta)-q)\times s_N + a\,\alpha\,\varepsilon\times\sum_{l=0}^{l=N} s_l = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_l}{s_N} = \frac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} = \frac{a\,\alpha\,(\varepsilon-\beta)+q}{a\,\alpha\,\varepsilon} = \frac{q+a\,\alpha\,(\varepsilon+N)}{a\,\alpha\,\varepsilon}$$

$$2)\quad (-a\,\alpha(\varepsilon-\beta)-q)\times s_N + a\,\varepsilon\,(\gamma+\varepsilon-\beta)\times\sum_{l=0}^{l=N} s_l = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{l=0}^{l=N} s_l}{s_N} = \frac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} = \frac{q+a\,\alpha\,(\varepsilon-\beta)}{a\,\varepsilon\,(\gamma+\varepsilon-\beta)} = \frac{q+a\,\alpha\,(\alpha-\beta-\gamma-N)}{a\,(\alpha-\gamma-N)(\alpha-\beta-N)}$$

En analysant le terme de puissance j^{N+1}, on peut montrer que quelque soit N la valeur du produit s_1 est égale à :

$$1)\quad s_1 = \frac{N(a-1)(2\varepsilon+N-1)-2\gamma\,N-2q}{2(a-1)}$$

$$2)\quad s_1 = \frac{N(a-1)(2\alpha-N-1)+2a\,\beta\,\gamma-2q}{2(a-1)}$$

Nota.Bene : pour le développement n°1, la condition d'existence du développement $\beta=-N$ est également la condition pour l'existence d'un développement polynomiale de la solution. En raison de la nature du développement de Figueiredo, la solution est analytique dans tout le plan complexe et se présente comme un développement de Taylor autour de z=0. Il y a donc nécessairement identification des solutions. Dans ces conditions le développement de Figueiredo issue d'une récurrence à deux termes est un polynôme en z qui plus c'est un polynôme en z de degré N. C'est ce que nous constatons également de manière numérique (voir plus loin).

Nota.Bene : pour le développement n°2 lorsque α=γ, en raison de l'expression $\varepsilon=\alpha-\gamma-N \Rightarrow \varepsilon=-N$, le développement de Figueiredo devient alors limité à droite. La situation d'un développement limité à droite se produit également lorsque $\gamma+\varepsilon=-2N \Rightarrow \alpha=-N$ ou bien lorsque $\beta=\alpha \Rightarrow \delta=\beta+1+N \Rightarrow \delta-\alpha=N+1$. Ces trois cas ont déjà été étudiés.

Expressions des récurrences de Figueiredo à deux termes dans les cas simples N=0 et N=1

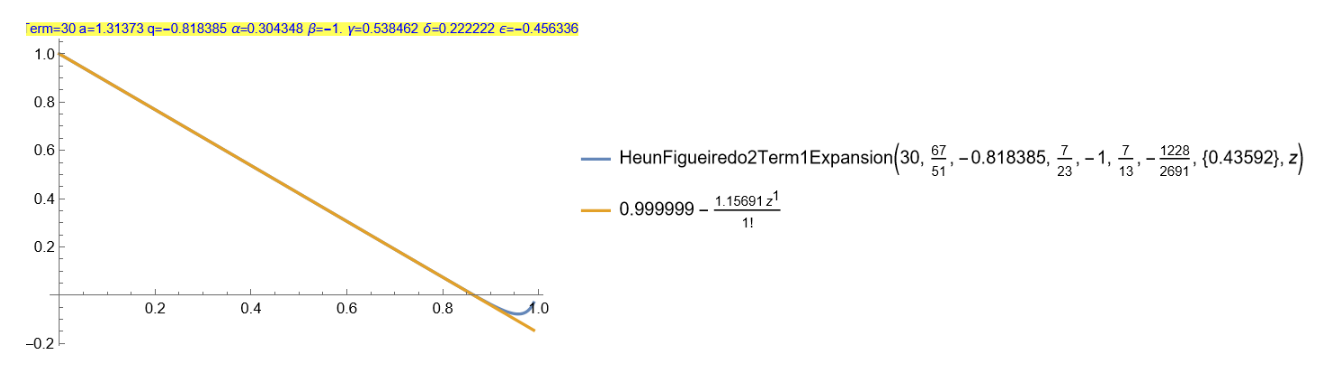
$$\begin{cases} N=0 \\ s_0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) & \begin{cases} q=0 \quad \beta=-N \\ y(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha)_j\,(\varepsilon)_j}{(\gamma)_j}\times z^j\,{}_2F_1(\alpha+j,-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z) \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} q=a\,\gamma\,\beta \quad \varepsilon=\alpha-\gamma \\ y(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha-\gamma-N)_j\,(\alpha-\beta)_j}{(\gamma)_j}\times z^j\,{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\alpha+\gamma\,;\gamma+j\,;z) \end{cases} \end{cases}$$

$$N=1 \Rightarrow \begin{cases} 1) & \begin{cases} q^2+q\,(\gamma+\varepsilon+a\,(\alpha-\varepsilon))+a\,\alpha\,\gamma=0 \qquad \beta=-N \qquad \dfrac{1+e_1}{e_1}=\dfrac{q+a\,\alpha\,(\varepsilon+1)}{a\,\alpha\,\varepsilon}\Rightarrow e_1=\dfrac{a\,\alpha\,\varepsilon}{q+a\,\alpha} \\ y(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha)_j\,(\varepsilon)_j}{(\gamma)_j}\times\frac{e_1+j}{e_1}\times z^j\,{}_2F_1(\alpha+j,-1-\varepsilon\,;\gamma+j\,;z) \qquad \dfrac{e_1+j}{e_1}=\dfrac{a\,\alpha\,\varepsilon+j\,(q+a\,\alpha)}{a\,\alpha\,\varepsilon} \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} q^2+q\,(\alpha-1-a\,(\beta+\gamma+2\beta\,\gamma))+a\,\beta\,\gamma(a(1+\beta)(1+\gamma)-\alpha)=0 \quad \varepsilon=\alpha-\gamma-1 \quad \dfrac{1+e_1}{e_1}=\dfrac{q+a\,\alpha\,(\alpha-\beta-\gamma-1)}{a\,(\alpha-\gamma-1)(\alpha-\beta-1)}\Rightarrow e_1=\dfrac{a\,(\alpha-\gamma-1)(\alpha-\beta-1)}{q+a\,(\alpha-(1+\beta)(1+\gamma))} \\ y(z)=\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{1}{j\,!}\times\frac{(\alpha-\gamma-1)_j\,(\alpha-\beta-1)_j}{(\gamma)_j}\times\frac{e_1+j}{e_1}\times z^j\,{}_2F_1(\alpha+j,\beta-\alpha+\gamma+1\,;\gamma+j\,;z) \qquad \dfrac{e_1+j}{e_1}=\dfrac{a\,(\alpha-\gamma-1)(\alpha-\beta-1)+j\,(q+a\,(\alpha-(1+\beta)(1+\gamma)))}{a\,(\alpha-\gamma-1)(\alpha-\beta-1)} \end{cases} \end{cases}$$

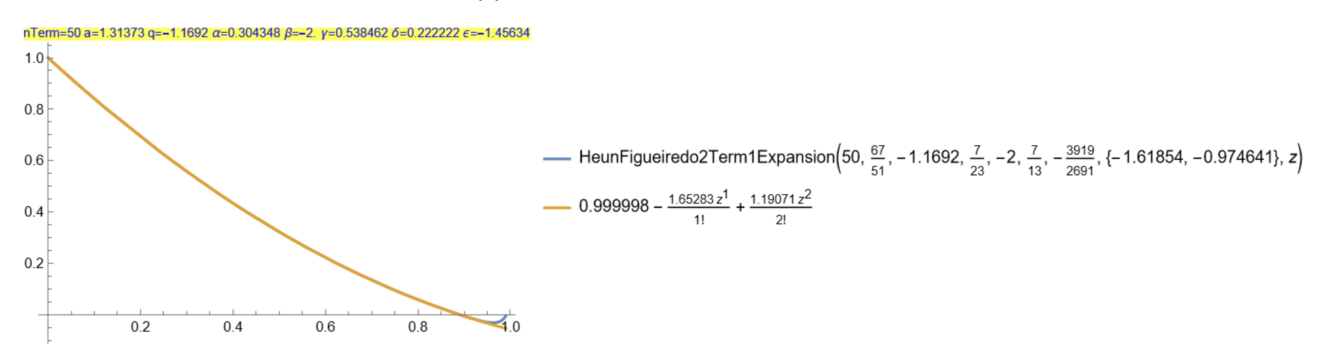
Graphes des récurrences de Figueiredo à deux termes

Tout d'abord je confirme que les développements de type 1 sont bien des polynômes de degré N, soit les polynômes de Heun, qui plus est le calcul du polynôme caractéristique dont q doit être une racine est exactement le même que celui calculé dans les constructions des polynômes de Heun.

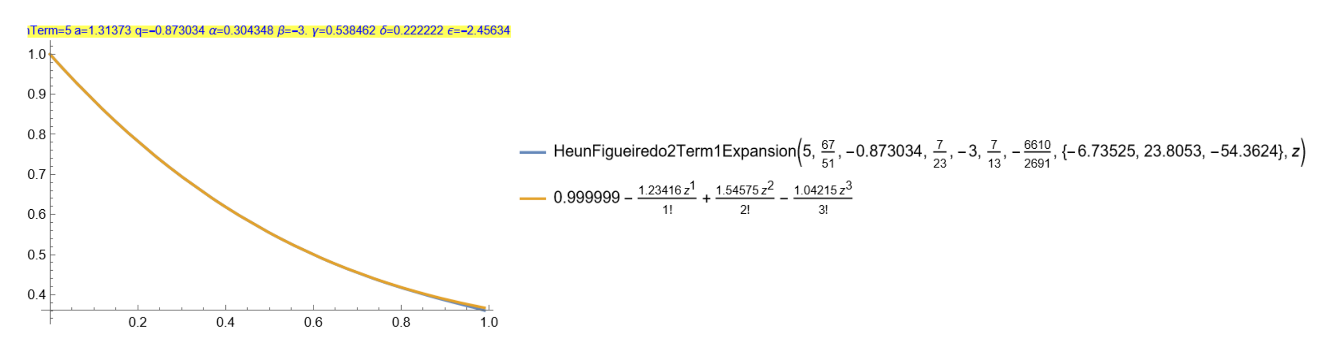
A titre illustratif voici un graphe pour la valeur N=1 avec 30 termes du développement :



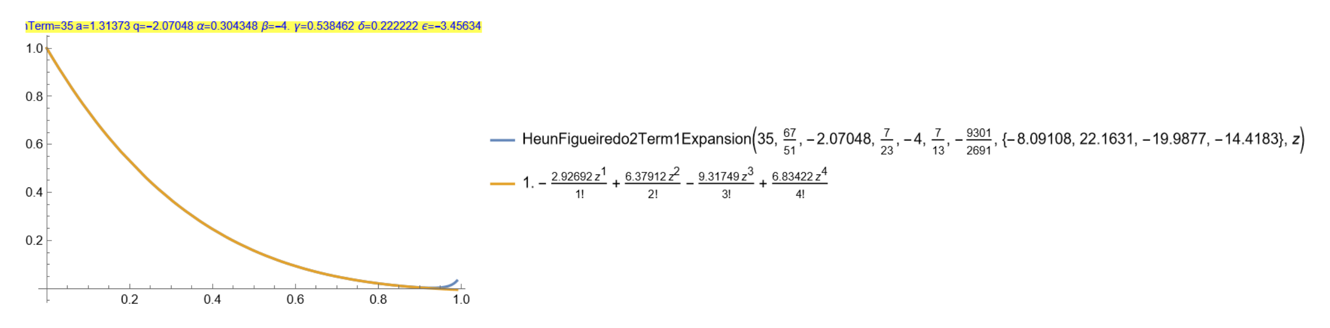
Pour N=2 avec 50 termes du développement :



Pour N=3 avec 5 termes du développement seulement :

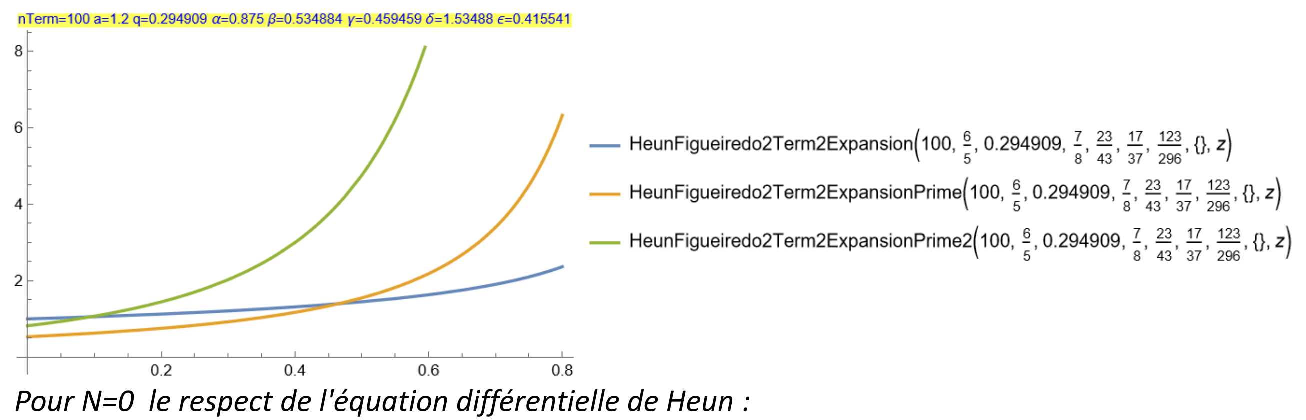


Pour N=4 avec 35 termes du développement :

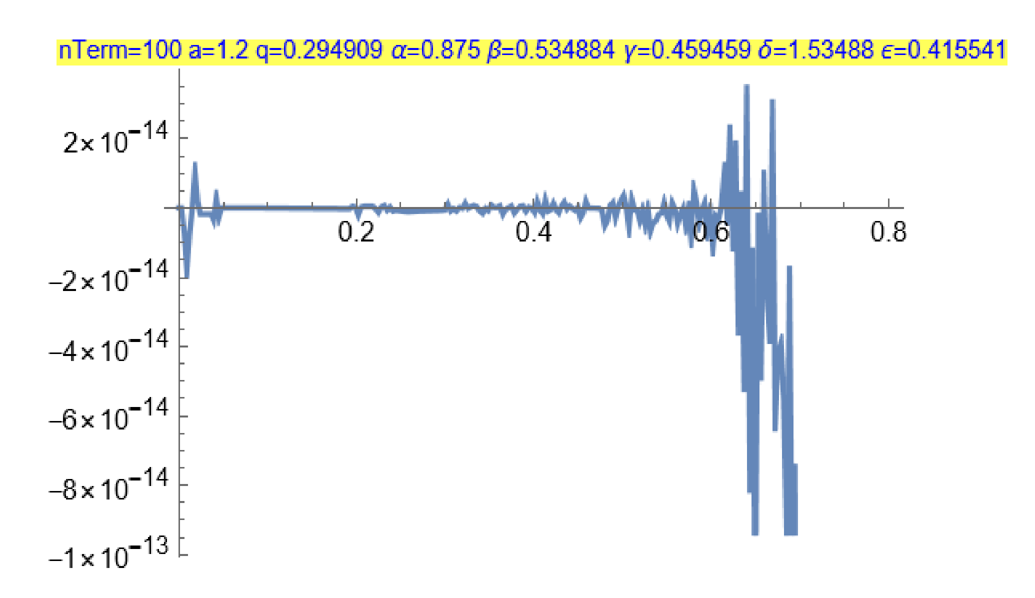


En ce qui concerne le développement de type 2

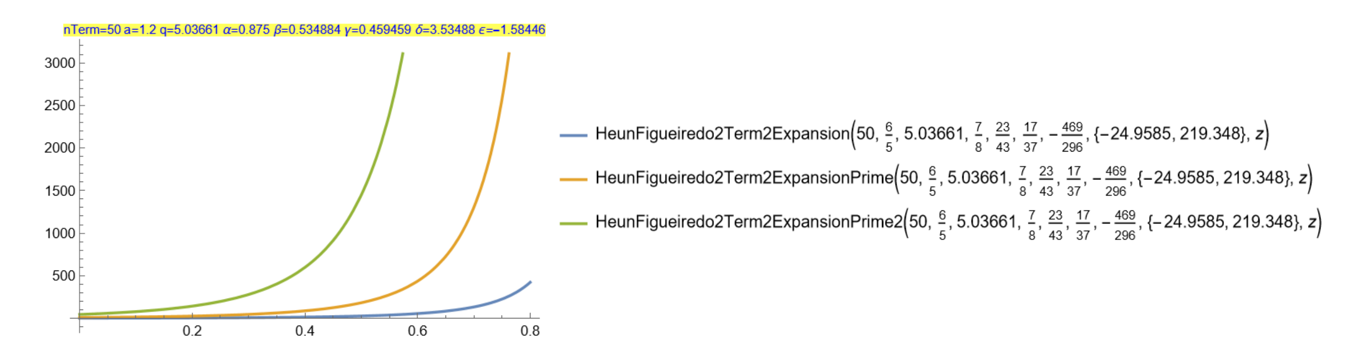
Pour N=0 la fonction, ses dérivée première et seconde :



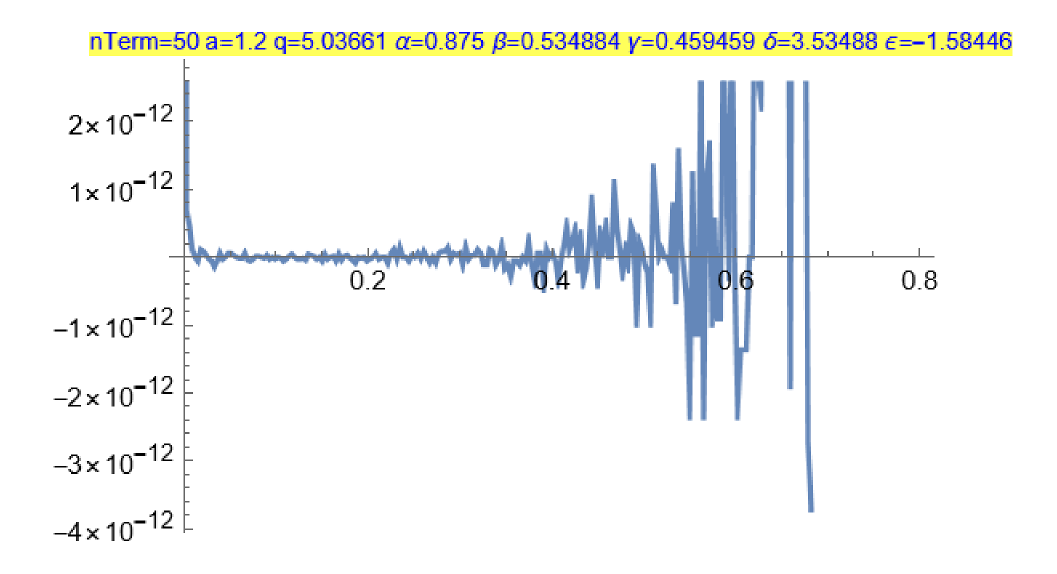
Pour N=0 le respect de l'équation différentielle de Heun :



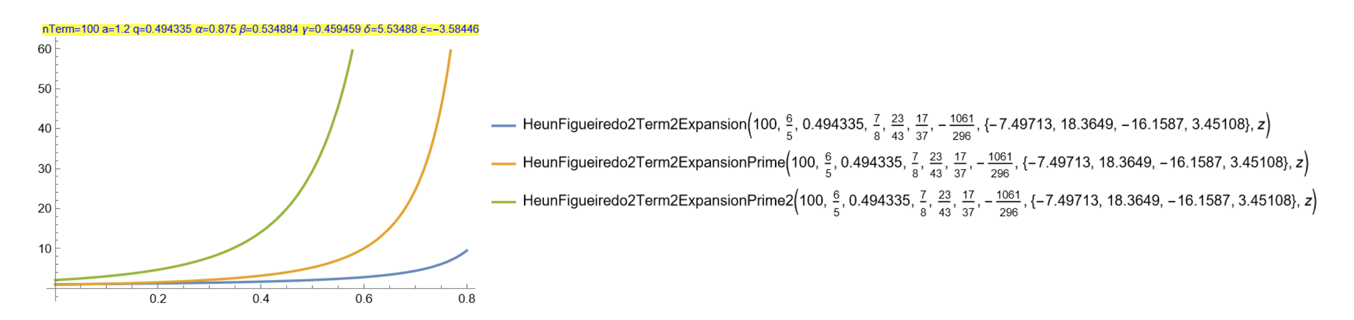
Pour N=2 la fonction, ses dérivée première et seconde :



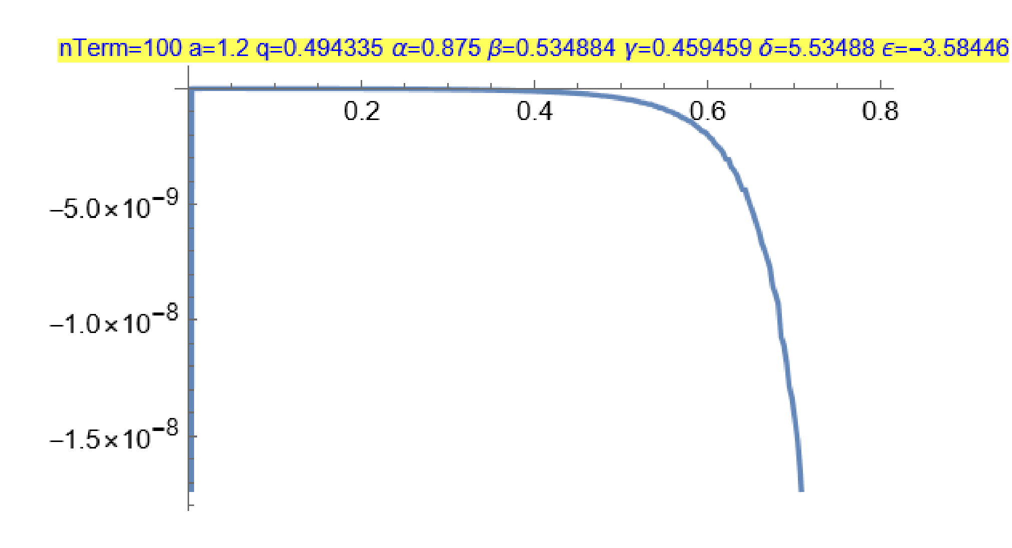
Pour N=2 le respect de l'équation différentielle de Heun :



Pour N=4 la fonction, ses dérivée première et seconde :



Pour N=4 le respect de l'équation différentielle de Heun :



<u>Equation de Heun algébrique à trois points singuliers réguliers z_1,z_2,z_3</u>

Par une transformation de Moëbius, il est toujours possible d'exprimer l'équation Fuschienne à trois points singuliers réguliers à distance finie comme suit :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z-z_1}+\frac{\delta}{z-z_2}+\frac{\alpha+\beta+1-\gamma-\delta}{z-z_3}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}y(z)=0$$

<u>Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun algébrique</u>

Partant de l'équation de Heun algébrique

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\alpha+\beta+1-\gamma-\delta}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\ \beta\ z-q)}{z\,(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

Et par le changement de fonction :

$$y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}(z-1)^{-\frac{\delta}{2}}(z-a)^{-\frac{\varepsilon}{2}}w(z)\quad avec\quad \varepsilon=\alpha+\beta+1-\gamma-\delta\quad puis\quad w(z)\to y(z)$$

Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :

$$y''(z)+\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-a}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{(z-1)^2}+\frac{F}{(z-a)^2}\right)y(z)=0$$

$$\varepsilon=\alpha+\beta+1-\gamma-\delta\qquad A=\frac{\gamma(a\delta+\varepsilon)-2q}{2a}\quad C=\frac{2a\alpha\beta+\gamma\ \varepsilon-a\varepsilon(\gamma+\delta)-2q}{2a(a-1)}$$

$$B=-A-C=\frac{2q-\gamma(a\delta+\varepsilon)}{2a}+\frac{2q-2a\alpha\beta-\gamma\ \varepsilon+a\varepsilon(\gamma+\delta)}{2a(a-1)}$$

$$D=\frac{\gamma(2-\gamma)}{4}\quad E=\frac{\delta(2-\delta)}{4}\quad F=\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{4}$$

Construction des équations différentielles de Heun confluentes :

Dans ce qui suit je vais suivre les pas de l'ouvrage de S.Y.Slavyanov.W.Lay « Special Functions, Heun's functions » pages 97 et suivantes. Je ne suivrais pas systématiquement le même choix de paramètres et par ailleurs il me semble que de petites erreurs s'y logent parfois. Vous en jugerez vous même en refaisant les calculs.

En théorie des équations différentielles ordinaires, la confluence d'une équation s'obtient lorsque plusieurs points singuliers réguliers viennent à se confondre (par un processus limite par exemple) pour former dans l'équation résultante un (ou plusieurs) point singulier irrégulier.

La simple confluence à partir de l'équation de Heun

La première confluence que l'on applique à l'équation de Heun consiste à rapprocher le point singulier z=a vers z=∞. Ce dernier point z=∞ devient alors irrégulier. On applique à l'équation de Heun (j'introduis une notation inspirée de celle de Slavyanov qui comporte les rangs des points singuliers à distance finis, suivi du rang du point singulier z=∞. La notation diffère par le seul fait que Slavyanov rajoute systématiquement 1 au calcul communément admis du rang). Ainsi l'opérateur différentiel de l'équation de Heun va s'écrire :

$$y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\alpha+\beta+1-\gamma-\delta}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{(\alpha\,\beta\,z-q)}{z\,(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\textit{Notation de Slavyanov}\quad L^{[0,0,0;0]}(a\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)=z\,(z-1)(z-a)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma(z-1)(z-a)+\delta\,z\,(z-a)+z\,(z-1)(\alpha+\beta+1-\gamma-\delta))\frac{d}{dz}+\alpha\,\beta\,z$$

$$\textit{Equation de Heun}\quad \left(L^{[0,0,0;0]}(a\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)-q\right)\{y(z)\}=0$$

Car il est bien connu que le rang d'une équation différentielle autour d'un point singulier régulier est 0. Par le processus limite suivant :

$$a\to\frac{1}{\varepsilon}\qquad \beta\to-\frac{a}{\varepsilon}\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to0}\quad -\varepsilon\,L^{[0,0,0;0]}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,;\alpha,-\frac{a}{\varepsilon},\gamma,\delta\,;z\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\quad -\varepsilon\times\left\{z\,(z-1)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\gamma\,(z-1)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\delta\,z\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)+z\,(z-1)\left(\alpha-\frac{a}{\varepsilon}+1-\gamma-\delta\right)\right)\frac{d}{dz}-\alpha\,\frac{a}{\varepsilon}\,z\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\quad -\left\{-z\,(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+(-\gamma\,(z-1)-\delta\,z-a\,z\,(z-1))\frac{d}{dz}-\alpha\,a\,z\right\}$$

$$=z\,(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\,(z-1)+\delta\,z+a\,z\,(z-1))\frac{d}{dz}+\alpha\,a\,z$$

$$L^{[0,0;1]}(a\,;\alpha,\gamma,\delta\,;z)=\lim_{\varepsilon\to0}\quad -\varepsilon\,L^{[0,0,0;0]}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,;\alpha,-\frac{a}{\varepsilon},\gamma,\delta\,;z\right)=z\,(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\,(z-1)+\delta\,z+a\,z\,(z-1))\frac{d}{dz}+\alpha\,a\,z$$

$$L^{[0,0;1]}(a\,;\alpha,\gamma,\delta\,;z)\{y(z)\}=q\,y(z)\Leftrightarrow y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+a\right)y'(z)+\frac{\alpha\,a\,z-q}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$$

C'est pratiquement la forme donnée par « NIST Handbook of Mathematical Functions-Heun functions », formule 31.12.1, tout comme celle donnée par Mathematica.

En ce qui concerne les points singuliers z=0 et z=1, ils restent réguliers et les exposants caractéristiques ρ de Fröbenius restent identiques à ceux de l'équation de Heun :

$$\begin{cases} P(z)=\dfrac{\gamma\,(z-1)+\delta\,z+a\,z\,(z-1)}{z\,(z-1)} \\ Q(z)=\dfrac{\alpha\,a\,z-q}{z\,(z-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0=\underset{z\to 0}{Lim}\quad z\,P(z)=\gamma \qquad p_0=\underset{z\to 1}{Lim}\quad (z-1)P(z)=\delta \\ q_0=\underset{z\to 0}{Lim}\quad z^2Q(z)=\underset{z\to 1}{Lim}\quad (z-1)^2Q(z)=0 \end{cases} \Rightarrow \rho(\rho-1)+\rho\,\delta=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho=0 \\ \rho=1-p_0 \end{cases} \to Symbole \quad P-Riemann \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1-\gamma & 1-\delta \end{pmatrix}$$

En revanche le point singulier à l'infini est un point irrégulier autour duquel l'équation différentielle simplement confluente est de rang 1. L'équation indicielle en z=∞ est de degré 1 : $\rho-\alpha=0$*. Cela indique que la solution autour de z=∞ peut formellement se développer comme une solution de Fröbenius sans que pour autant la série converge.*

<u>L'équation de Heun-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=0</u>

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n \qquad a(n-1+\alpha)\,c_{n-1}+\left(n(n-1-a+\gamma+\delta)-q\right)c_n-(n+1)(n+\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \\ c_1=-\dfrac{q}{\gamma} \\ c_n=\dfrac{\left((n-1)(n-2-a+\gamma+\delta)-q\right)c_{n-1}+a(n-2+\alpha)\,c_{n-2}}{n(n-1+\gamma)} \end{cases}$$

<u>L'équation de Heun-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=1-γ</u>

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n \qquad a(n+\alpha-\gamma)\,c_{n-1}+\left((n+1-\gamma)(n-a+\delta)-q\right)c_n-(n+1)(n+2-\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \\ c_1=-\dfrac{q+(1-\gamma)(\delta-a)}{\gamma-2} \\ c_n=\dfrac{\left((n-\gamma)(n-1-a+\delta)-q\right)c_{n-1}+a(n-1+\alpha-\gamma)\,c_{n-2}}{n(n+1-\gamma)} \end{cases}$$

L'équation de Heun-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=1, exposant caractéristique ρ=0

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n (z-1)^n \qquad a(n-1+\alpha)\,c_{n-1}+\left(n(n-1+a+\gamma+\delta)+a\alpha-q\right)c_n+(n+1)(n+\delta)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \\ c_1=\dfrac{q-a\alpha}{\delta} \\ c_n=-\dfrac{\left((n-1)(n-2+a+\gamma+\delta)+a\alpha-q\right)c_{n-1}+a(n-2+\alpha)\,c_{n-2}}{n(n-1+\delta)} \end{cases}$$

L'équation de Heun-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=1, exposant caractéristique ρ=1-δ

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=(z-1)^{1-\delta}\sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n (z-1)^n \qquad a(n+\alpha-\delta)\,c_{n-1}+\left((n+1-\delta)(n+a+\gamma)+a\alpha-q\right)c_n+(n+1)(n+2-\delta)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \\ c_1=-\dfrac{(1-\delta)(a+\gamma)+a\alpha-q}{2-\delta} \\ c_n=-\dfrac{\left((n-\delta)(n-1+a+\gamma)+a\alpha-q\right)c_{n-1}+a(n-1+\alpha-\delta)c_{n-2}}{n(n+1-\delta)} \end{cases}$$

L'équation de Heun-Confluente : solution formelle de Fröbenius autour de z=∞, exposant caractéristique ρ=α

La solution formelle suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{c_n}{z^n} \qquad -(n-1+\alpha)(n+\alpha-\gamma)\,c_{n-1}+\left((n+\alpha)(n+1+a+\alpha-\gamma-\delta)-q\right)c_n-a(n+1)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \\ c_1=\dfrac{\left(\alpha(1+a+\alpha-\gamma-\delta)-q\right)c_{n-1}}{a} \\ c_n=\dfrac{-(n-2+\alpha)(n-1+\alpha-\gamma)\,c_{n-2}+\left((n-1+\alpha)(n+a+\alpha-\gamma-\delta)-q\right)c_{n-1}}{a\,n} \end{cases}$$

Cette solution formelle ne converge pas pour les valeurs z réelles.

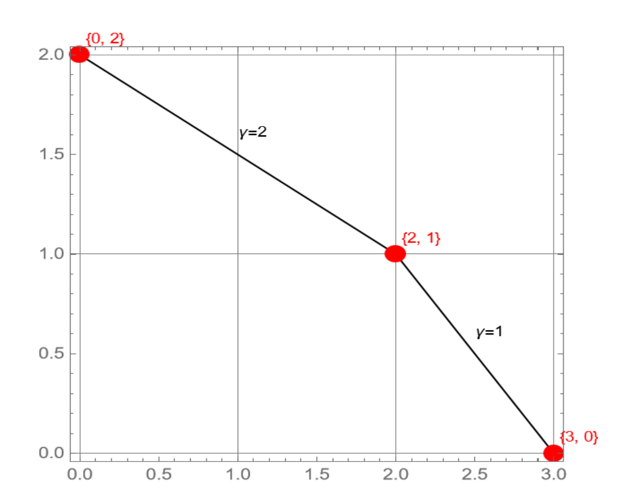
Si l'on transforme l'équation confluente par le changement de variable z->1/z, il vient l'équation :

$$y''(z)+\frac{1}{z^2}\left(z\left(2-\gamma+\frac{\delta}{z-1}\right)-a\right)y'(z)+\frac{qz-\alpha\, a}{z^3\,(z-1)}\,y(z)=0$$

Le point singulier irrégulier est maintenant z=0. J'écris cette équation sous la forme suivante :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{1}{z^2}\left(z\left(2-\gamma+\frac{\delta}{z-1}\right)-a\right) \qquad p_2(z)=\frac{qz-\alpha\, a}{z^3\,(z-1)}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Pour trouver la deuxième solution de forme normale, on trace le diagramme de Puisieux tel qu'il est évoqué dans l'ouvrage « A.R.Forsythe : Theory Of Differential Equations » (voir le document sur les solutions des « équations différentielle autour des points singuliers réguliers et irrégulier).



La valeur du paramètre γ suggère la recherche de solution autour de z=0 sous la forme : $y(z)=e^{\sum_{l=1}^{l=\gamma-1}\frac{\beta_l}{z^l}}z^\rho u(z)$*. Ce type de solution est diversement appelée solution de forme normale, solution de Thomé, … Lorsque γ=1 alors l'exponentielle disparaît et l'on retombe sur un développement de Fröbenius. Si γ=2, alors on recherche la solution sous la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}z^\rho u(z)$*. On note* $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{z^2}$*. La théorie développé par « A.R.Forsythe : Theory Of Differential Equations » mais aussi par « E . L . Ince : Ordinary Differential Equations » nous dit que pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximal en 1/z dans l'expression :* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)(\Omega'(z))^1+p_2(z)(\Omega'(z))^0$*. Il vient :* $\frac{\beta(\beta+a)}{z^4}\Rightarrow\beta=0 \quad ou \quad \beta=-a$*. Dans le premiers cas on retombe sur le développement de Fröbenius.*

En substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{-\frac{a}{z}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{a(z-1)+z((2-\gamma)(z-1)+\delta)}{z^2(z-1)} \qquad p_2(z)=\frac{qz+a(\gamma-\alpha+\delta-x\gamma)}{z^3(z-1)}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\gamma+\delta-\alpha$.

La deuxième solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :

$$y(z)=e^{-a\,z}z^{\alpha-\gamma-\delta}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$$

Injectons cette forme dans l'équation de Heun confluente, il vient alors une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients du développement :

$$y(z)=e^{-a\,z}z^{\alpha-\gamma-\delta}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}\qquad -(n+\delta-\alpha)(n-1+\gamma+\delta-\alpha)\,c_{n-1}+((n+1-\alpha)(n+\gamma+\delta-\alpha)+a(\alpha-\delta-n)-q)\,c_n+a(n+1)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_0=1\\ c_1=\dfrac{q-(1-\alpha)(\gamma+\delta-\alpha)-a(\alpha-\delta)}{a}\\ c_n=\dfrac{(n-1+\delta-\alpha)(n-2+\gamma+\delta-\alpha)\,c_{n-2}-((n-\alpha)(n-1+\gamma+\delta-\alpha)+a(\alpha-\delta+1-n)-q)\,c_{n-1}}{a\,n}\end{cases}$$

<u>Forme alternative de l'équation de Heun-Confluente : équation des ondes sphéroïdales généralisées</u>

A partir de la forme alternative de l'équation de Heun aux trois points singuliers z_1,z_2 et z_3 :

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z-z_1}+\frac{\delta}{z-z_2}+\frac{\alpha+\beta+1-\gamma-\delta}{z-z_3}\right)y'(z)+\frac{(\alpha\,\beta\,z-q)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}y(z)=0$$

$$L^{[0,0,0;0]}(z_1,z_2,z_3\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\,(z-z_2)+\delta\,(z-z_1)+(\alpha+\beta+1-\gamma-\delta)\,(z-z_1)(z-z_2))\frac{d}{dz}+\alpha\,\beta\,z$$

Par la processus limite faisant tendre z_3 vers l'infini

$$z_3\to\frac{1}{\varepsilon}\qquad \beta\to-\frac{a}{\varepsilon}\Rightarrow \underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\,L^{[0,0,0;0]}\left(z_1,z_2,\frac{1}{\varepsilon}\,;\alpha,-\frac{a}{\varepsilon},\gamma,\delta\,;z\right)$$

$$=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\times\left\{(z-z_1)(z-z_2)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\gamma\,(z-z_2)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\delta\,(z-z_1)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)+(z-z_1)(z-z_2)\left(\alpha-\frac{a}{\varepsilon}+1-\gamma-\delta\right)\right)\frac{d}{dz}-\alpha\,\frac{a}{\varepsilon}\,z\right\}$$

$$=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\left\{-(z-z_1)(z-z_2)\frac{d^2}{dz^2}+(-\gamma\,(z-z_2)-\delta\,(z-z_1)-a\,(z-z_1)(z-z_2))\frac{d}{dz}-\alpha\,a\,z\right\}$$

$$L^{[0,0;1]}(a\,;\alpha,\gamma,\delta\,;z)=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\,L^{[0,0,0;0]}\left(z_1,z_2,\frac{1}{\varepsilon}\,;\alpha,-\frac{a}{\varepsilon},\gamma,\delta\,;z\right)=(z-z_1)(z-z_2)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\,(z-z_2)+\delta\,(z-z_1)+a\,(z-z_1)(z-z_2))\frac{d}{dz}+\alpha\,a\,z$$

$$\left(L^{[0,0;1]}(z_1,z_2,a\,;\alpha,\gamma,\delta\,;z)-q\right)\{y(z)\}=0\Leftrightarrow y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z-z_1}+\frac{\delta}{z-z_2}+a\right)y'(z)+\frac{\alpha\,a\,z-q}{(z-z_1)(z-z_2)}y(z)=0$$

En posant maintenant z_1=-1 z_2=1, il vient : $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z+1}+\frac{\delta}{z-1}+a\right)y'(z)+\frac{\alpha\,a\,z-q}{z^2-1}y(z)=0$

Par le changement de fonction : $y(z)=(z+1)^{\frac{1-\gamma}{2}}(z-1)^{\frac{1-\delta}{2}}e^{-\frac{a\,z}{2}}g(z)$*, l'équation différentielle prend la forme :*

$$y''(z)+\frac{2z}{z^2-1}y'(z)+\left(A+\frac{B+C\,z}{z^2-1}+\frac{D+E\,z}{(z^2-1)^2}\right)y(z)=0$$

$$\text{Avec}\quad\begin{cases}A=-\dfrac{a^2}{4}\quad B=\dfrac{1}{4}\left(\gamma(2+2a-\gamma)-2\delta(a+\gamma-1)-\delta^2\right)-q\quad C=\dfrac{a}{2}(2\alpha-\gamma-\delta)\\ D=-\dfrac{(\gamma-1)^2+(\delta-1)^2}{2}\quad E=\dfrac{1}{2}(\gamma-\delta)(\gamma+\delta-2)=\dfrac{(\gamma-1)^2-(\delta-1)^2}{2}\end{cases}$$

En posant :

$$\frac{d}{dz}\left((z^2-1)\frac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(A(z^2-1)+B+C\,z+\frac{D+E\,z}{z^2-1}\right)y(z)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(A(1-z^2)-B-C\,z+\frac{D+E\,z}{1-z^2}\right)y(z)=0$$

$$\text{Avec}\quad\begin{cases}\lambda=-B=q+\dfrac{1}{4}\left(\delta^2+2\delta(a+\gamma-1)+\gamma(\gamma-2-2a)\right)\quad \eta=\dfrac{a}{2}\to A=-\eta^2\quad 2\eta\,c=C=\dfrac{a}{2}(2\alpha-\gamma-\delta)\to c=\dfrac{2\alpha-\gamma-\delta}{2}\\ \mu^2+\nu^2=-D=\dfrac{(\gamma-1)^2+(\delta-1)^2}{2}\quad 2\mu\nu=-E=\dfrac{(\gamma-1)^2-(\delta-1)^2}{2}=-\dfrac{1}{2}(\gamma-\delta)(\gamma+\delta-2)\Leftrightarrow\mu=\dfrac{\gamma-\delta}{2}\quad \nu=1-\dfrac{\gamma+\delta}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(\lambda-\eta^2(1-z^2)-2\eta\,c\,z-\frac{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\,z}{1-z^2}\right)y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left((z^2-1)\frac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(-\lambda-\eta^2(z^2-1)+2\eta\,c\,z-\frac{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\,z}{z^2-1}\right)y(z)=0$$

Cette équation différentielle est apparentée à celle des ondes sphéroïdales généralisées. Mais attention en général le signe de η^2 est inversé !

Par exemple lorsque $\nu=0$, il vient une équation « s'apparentant à celle des ondes sphéroïdales de Coulomb » :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dz}\left((1-z^2)\dfrac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(\lambda-\eta^2(1-z^2)-2\eta\,c\,z-\dfrac{\mu^2}{1-z^2}\right)y(z)=0\\ \Leftrightarrow\dfrac{d}{dz}\left((z^2-1)\dfrac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(-\lambda-\eta^2(z^2-1)+2\eta\,c\,z-\dfrac{\mu^2}{z^2-1}\right)y(z)=0\end{cases}$$

Si $\nu=c=0$, c'est une équation s'apparentant à celle des ondes sphéroïdales :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dz}\left((1-z^2)\dfrac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(\lambda-\eta^2(1-z^2)-\dfrac{\mu^2}{1-z^2}\right)y(z)=0\\ \Leftrightarrow\dfrac{d}{dz}\left((z^2-1)\dfrac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(-\lambda-\eta^2(z^2-1)-\dfrac{\mu^2}{z^2-1}\right)y(z)=0\end{cases}$$

On voit ici plus clairement que si l'on pose $\Omega=i\eta$, alors c'est bien l'équation sphéroïdale qui est obtenue : $\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{d\,y(z)}{dz}\right)+\left(\lambda+\Omega^2(1-z^2)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right)y(z)=0$.

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Confluente

Partant de l'équation de Heun-Confluente algébrique :

$$y''(z)+\left(\beta+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{\alpha\;\beta\;z-q}{z\,(z-1)}\;y(z)=0$$

Et par le changement de fonction : $y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}(z-1)^{-\frac{\delta}{2}}\,e^{-\frac{\beta z}{2}}\,w(z)\quad puis\quad w(z)\rightarrow y(z)$. *Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z)+\left(A+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{(z-1)^2}\right)y(z)=0$$

$$A=-\frac{\beta^2}{4}\quad B=q+\frac{\gamma(\delta-\beta)}{2}\quad C=-q+\alpha\beta-\frac{\gamma(\delta+\beta)}{2}\quad D=\frac{\gamma(2-\gamma)}{4}\quad E=\frac{\delta(2-\delta)}{4}$$

La bi-confluence à partir de la simple confluence de l'équation de Heun

On applique le processus limite suivant à l'opérateur différentiel de simple confluence :

$$L^{[0,0;1]}(a\,;\alpha,\gamma,\delta\,;z)=z\,(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\gamma(z-1)+\delta\;z+a\;z\,(z-1)\right)\frac{d}{dz}+\alpha\;a\;z$$

$$z\rightarrow\varepsilon\;z\quad a\rightarrow-\frac{1}{\varepsilon^2}\quad\delta\rightarrow-\frac{a}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\Rightarrow\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\;L^{[0,0;1]}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\,;\alpha,\gamma,-\frac{a}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\,;\varepsilon\;z\right)=$$

$$=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\times\left\{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\;z\,(\varepsilon\;z-1)\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma(\varepsilon\;z-1)+\left(-\frac{a}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\varepsilon\;z-\frac{1}{\varepsilon^2}\;\varepsilon\;z\,(\varepsilon\;z-1)\right)\frac{d}{dz}-\alpha\;\frac{1}{\varepsilon^2}\;\varepsilon\;z\right\}$$

$$=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\left\{-z\,\frac{d^2}{dz^2}+\left(-\gamma-a\;z-z^2\right)\frac{d}{dz}-\alpha\;z\right\}=z\,\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+a\;z+\gamma\right)\frac{d}{dz}+\alpha\;z$$

$$L^{[0;2]}(a\,;\alpha,\gamma\,;z)=\underset{\varepsilon\to0}{Lim}\quad-\varepsilon\;L^{[0,0;1]}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\,;\alpha,\gamma,-\frac{a}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\,;\varepsilon\;z\right)=z\,\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+a\;z+\gamma\right)\frac{d}{dz}+\alpha\;z$$

$$L^{[0;2]}(a\,;\alpha,\gamma\,;z)\{y(z)\}=q\;y(z)\Leftrightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+a+z\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+\frac{\alpha\;z-q}{z}\;y(z)=0$$

$$Si\;a\rightarrow\delta\Rightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\delta+z\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+\frac{\alpha\;z-q}{z}\;y(z)=0$$

C'est la forme donnée par « NIST Handbook of Mathematical Functions-Heun functions », formule 31.12.3. Par une simple opération homothétique sur la coordonnée z, on parvient à la forme plus générale donnée par exemple par Mathematica :

$$\tilde{z}=\beta\;z\quad\Rightarrow\frac{d^2y(\tilde{z})}{d\,\tilde{z}^2}+\frac{1}{\beta}\left(\beta\,\frac{\gamma}{\tilde{z}}+a+\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)\frac{d\,y(\tilde{z})}{d\,\tilde{z}}+\frac{1}{\beta}\,\frac{\frac{\alpha}{\beta}\,\tilde{z}-q}{\tilde{z}}\;y(z)=0$$

$$\tilde{\gamma}=\gamma\qquad\tilde{\delta}=\frac{a}{\beta}\qquad\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{\beta^2}\qquad\tilde{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta^2}\qquad\tilde{q}=\frac{q}{\beta}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y(\tilde{z})}{d\,\tilde{z}^2}+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{z}}+\tilde{\delta}+\tilde{\varepsilon}\;\tilde{z}\right)\frac{d\,y(\tilde{z})}{d\,\tilde{z}}+\frac{\tilde{\alpha}\;\tilde{z}-\tilde{q}}{\tilde{z}}\;y(z)=0$$

En ce qui concerne le point singulier régulier z=0, les exposants caractéristiques de Fröbenius restent identiques à ceux de l'équation de Heun :

$$\begin{cases} P(\tilde{z}) = \dfrac{\tilde{\gamma} + \tilde{z}\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon}\,\tilde{z}^2}{\tilde{z}} \\ Q(\tilde{z}) = \dfrac{\tilde{\alpha}\,\tilde{z} - \tilde{q}}{\tilde{z}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = \lim\limits_{\tilde{z}\to 0} \quad \tilde{z}\,P(\tilde{z}) = \tilde{\gamma} \\ q_0 = \lim\limits_{\tilde{z}\to 0} \quad \tilde{z}^2 Q(\tilde{z}) \end{cases} \Rightarrow \rho(\rho-1) + \rho\,\tilde{\gamma} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 1-\tilde{\gamma} \end{cases} \to Symbole \quad P-Riemann \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\tilde{\gamma} \end{pmatrix}$$

Le point singulier à l'infini est irrégulier et l'équation différentielle y est de rang 2. *L'équation indicielle en z=∞ est de degré 1 :* $\rho - \alpha = 0$*. Cela indique que la solution autour de z=∞ peut formellement se développer comme une solution de Fröbenius sans que pour autant la série converge.*

<u>L'équation de Heun-Bi-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=0</u>

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + a + z\right) y'(z) + \frac{\alpha\, z - q}{z}\, y(z) = 0 \qquad y(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n$$

$$(n-1+\alpha)\, c_{n-1} + (a\, n - q)\, c_n + (n+1)(n+\gamma)\, c_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = \dfrac{q}{\gamma} \\ c_n = -\dfrac{(a(n-1)-q)\, c_{n-1} + (n-2+\alpha)\, c_{n-2}}{n(n-1+\gamma)} \end{cases}$$

<u>L'équation de Heun-Bi-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=1-γ</u>

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + a + z\right) y'(z) + \frac{\alpha\, z - q}{z}\, y(z) = 0 \qquad y(z) = z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n z^n$$

$$(n+\alpha-\gamma)\, c_{n-1} + (a(n+1-\gamma) - q)\, c_n + (n+1)(n+2-\gamma)\, c_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \qquad c_1 = -\dfrac{q + (1-\gamma)(\delta - a)}{\gamma - 2} \\ c_n = -\dfrac{(a(n-\gamma)-q)\, c_{n-1} + (n-1+\alpha-\gamma)\, c_{n-2}}{n(n+2-\gamma)} \end{cases}$$

<u>L'équation de Heun-Bi-Confluente : solution formelle de Fröbenius autour de z=∞, exposant caractéristique ρ=α</u>

La solution formelle suit une récurrence à trois termes :

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + a + z\right) y'(z) + \frac{\alpha\, z - q}{z}\, y(z) = 0 \qquad y(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

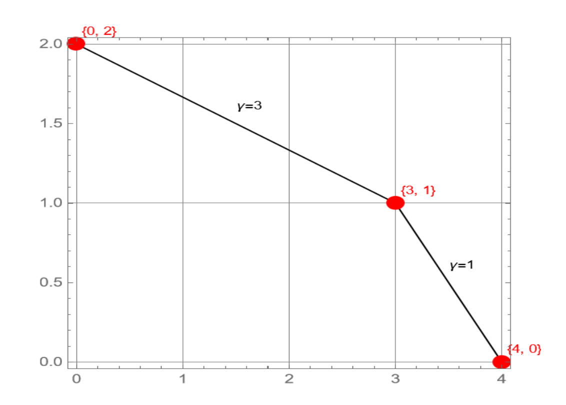
$$(n-1+\alpha)(n+\alpha-\gamma)\, c_{n-1} + (-a(n+\alpha) - q)\, c_n - (n+1)\, c_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = -a\,\alpha - q \\ c_n = \dfrac{(n-2+\alpha)(n-1+\alpha-\gamma) c_{n-2} - (a(n-1+\alpha)+q) c_{n-1}}{n} \end{cases}$$

Cette solution formelle ne converge pas pour les valeurs z réelles.

Si l'on transforme l'équation Bi-confluente par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=-\frac{1+z\,(a+z(\gamma-2))}{z^3} \qquad p_2(z)=\frac{\alpha-q\,z}{z^4}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La première valeur γ=1, correspond au développement de Fröbenius, déjà étudiée. La deuxième valeur γ=3 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{z^2}+2\frac{\beta_2}{z^3}$. *Pour déterminer β1 et β2, il convient d'annuler les deux termes de puissance maximale en 1/z dans l'expression :* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)(\Omega'(z))^1+p_2(z)(\Omega'(z))^0$. *Il vient :* $\beta_1=-a \quad et \quad \beta_2=-\frac{1}{2} \quad ou \quad \beta_1=0 \quad et \quad \beta_2=0$. *Dans le second cas on retombe sur le développement de Fröbenius.*

Donc en substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{-\frac{a}{z}-\frac{1}{2z^2}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{1+a\,z-z^2(\gamma-2)}{z^3} \qquad p_2(z)=-\frac{1+\gamma-\alpha+z\,(q+a\gamma)}{z^4}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=1+\gamma-\alpha$. *La deuxième solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{-a\,z-\frac{z^2}{2}}z^{\alpha-\gamma-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun Bi-confluente, il vient alors une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{-a\,z-\frac{z^2}{2}}z^{\alpha-\gamma-1}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l} \qquad (n+1-\alpha)(n-\alpha+\gamma)\,c_{n-1}+(a(n+1-\alpha)-q)\,c_n+(n+1)\,c_{n+1}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_0=1 \quad c_1=q-a(1-\alpha)\\ c_n=-\dfrac{(n-\alpha)(n-1-\alpha+\gamma)\,c_{n-2}+(a(n-\alpha)-q)\,c_{n-1}}{n}\end{cases}$$

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Bi-Confluente

Partant de l'équation de Heun-Bi-Confluente algébrique :

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+a+z\right)y'(z)+\frac{\alpha\ z-q}{z}\ y(z)=0$$

Et par le changement de fonction : $y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}\ e^{-\left(\frac{z+a}{2}\right)^2}\ w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$*. Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z)+\left(-\frac{z^2}{4}-\frac{a\ z}{2}+\frac{4\alpha-a^2-2(1+\gamma)}{4}-\frac{q+\frac{a\gamma}{2}}{z}+\frac{\gamma\ (2-\gamma)}{4z^2}\right)y(z)=0$$

La double-confluence à partir de la simple confluence de l'équation de Heun

On applique le processus limite suivant à l'opérateur différentiel de simple confluence :

$$L^{[0,0;1]}(a\ ;\alpha,\gamma,\delta\ ;z)=z\ (z-1)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\ (z-1)+\delta\ z+a\ z\ (z-1))\frac{d}{dz}+\alpha\ a\ z$$

$$z\to\frac{z}{\varepsilon}\quad a\to\varepsilon\quad \gamma\to\gamma-\frac{a}{\varepsilon}\quad \delta\to\frac{a}{\varepsilon}\Rightarrow \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\quad L^{[0,0;1]}\left(\varepsilon\ ;\alpha,\gamma-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon};\frac{z}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\quad \left\{\varepsilon^2\frac{z}{\varepsilon}\left(\frac{z}{\varepsilon}-1\right)\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon\left(\left(\gamma-\frac{a}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z}{\varepsilon}-1\right)+\frac{a}{\varepsilon}\frac{z}{\varepsilon}+\varepsilon\frac{z}{\varepsilon}\left(\frac{z}{\varepsilon}-1\right)\right)\frac{d}{dz}+\varepsilon\ \alpha\ \frac{z}{\varepsilon}\right\}$$

$$=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\quad \left\{z\ (z-\varepsilon)\frac{d^2}{dz^2}+(\gamma\ z+a-\varepsilon\ \gamma+z\ (z-\varepsilon))\frac{d}{dz}+\varepsilon\ \alpha\ \frac{z}{\varepsilon}\right\}=z^2\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+\gamma\ z+a\right)\frac{d}{dz}+\alpha\ z$$

$$L^{[1;1]}(a\ ;\alpha,\gamma\ ;z)=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\quad L^{[0,0;1]}\left(\varepsilon\ ;\alpha,\gamma-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon};\frac{z}{\varepsilon}\right)=z^2\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+\gamma\ z+a\right)\frac{d}{dz}+\alpha\ z$$

$$L^{[1;1]}(a\ ;\alpha,\gamma\ ;z)\{y(z)\}=q\ y(z)\Leftrightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\frac{a}{z^2}+\frac{\gamma}{z}+1\right)\frac{dy(z)}{dz}+\frac{\alpha\ z-q}{z^2}\ y(z)=0$$

$$Notation\quad a\to\delta\Rightarrow L^{[1;1]}(\alpha,\delta,\gamma\ ;z)=z^2\frac{d^2}{dz^2}+\left(\delta+\gamma\ z+z^2\right)\frac{d}{dz}+\alpha\ z\Leftrightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\frac{\delta}{z^2}+\frac{\gamma}{z}+1\right)\frac{dy(z)}{dz}+\frac{\alpha\ z-q}{z^2}\ y(z)=0$$

C'est la forme donnée par « NIST Handbook of Mathematical Functions-Heun functions », formule 31.12.2. Par une simple opération homothétique sur la coordonnée z, on parvient à la forme plus générale donnée par exemple par Mathematica :

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z^2}+\frac{\delta}{z}+1\right)\frac{dy(z)}{dz}+\frac{\alpha\ z-q}{z^2}\ y(z)=0$$

$$\tilde{z}=\beta\ z\quad\Rightarrow\frac{d^2y(\tilde{z})}{d\ \tilde{z}^2}+\left(\beta\ \frac{\gamma}{\tilde{z}^2}+\frac{\delta}{\tilde{z}}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{d\ y(\tilde{z})}{d\ \tilde{z}}+\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ \tilde{z}-q}{\tilde{z}^2}\ y(z)=0$$

$$\tilde{\gamma}=\beta\ \gamma\qquad\tilde{\delta}=\delta\qquad\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{\beta}\qquad\tilde{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\qquad\tilde{q}=q$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y(\tilde{z})}{d\ \tilde{z}^2}+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{z}^2}+\frac{\tilde{\delta}}{z}+\tilde{\varepsilon}\right)\frac{d\ y(\tilde{z})}{d\ \tilde{z}}+\frac{\tilde{\alpha}\ \tilde{z}-\tilde{q}}{\tilde{z}^2}\ y(z)=0$$

En ce qui concerne les points singuliers z=0 et z=∞, ces derniers ne sont pas réguliers. Aux deux points l'équation différentielle est de rang 1. En z=0 l'équation indicielle est de degré 1 : ρ=0. Cela signifie qu'une solution formelle peut se développer comme une série de Taylor sans que la convergence en soit assurée. L'équation indicielle en z=∞ est de degré 1 : $\rho-\alpha=0$*. Cela indique que la solution autour de z=∞ peut formellement se développer comme une solution de Fröbenius sans que pour autant la série converge.*

L'équation de Heun-Double-Confluente : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=0

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y''(z)+\left(\frac{\delta}{z^2}+\frac{\gamma}{z}+1\right)y'(z)+\frac{\alpha\, z-q}{z^2}\,y(z)=0 \qquad y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n$$

$$(n-1+\alpha)\,c_{n-1}+\left(n(n-1+\gamma)-q\right)c_n+(n+1)\delta\, c_{n+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\dfrac{q}{\delta} \\ c_n=-\dfrac{\left((n-1)(n-2+\gamma)-q\right)c_{n-1}+(n-2+\alpha)\,c_{n-2}}{n\,\delta} \end{cases}$$

Cette solution formelle ne converge pas pour les valeurs z réelles.

L'équation de Heun-Double-Confluente : solution formelle de Fröbenius autour de z=∞, exposant caractéristique ρ=α

La solution formelle suit une récurrence à trois termes :

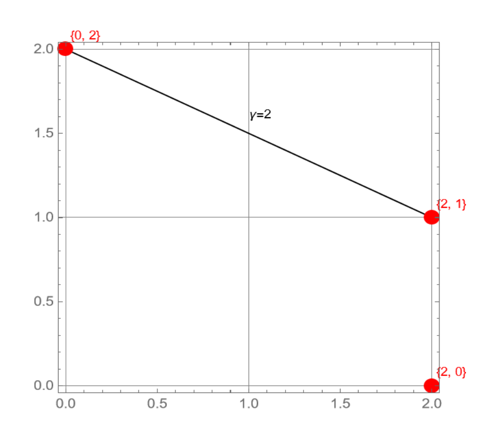
$$y''(z)+\left(\frac{\delta}{z^2}+\frac{\gamma}{z}+1\right)y'(z)+\frac{\alpha\, z-q}{z^2}\,y(z)=0 \qquad y(z)=z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{c_n}{z^n}$$

$$-\delta(n-1+\alpha)\,c_{n-1}+\left((n+1+\alpha-\gamma)(n+\alpha)-q\right)c_n-(n+1)\,c_{n+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\alpha(1+\alpha-\gamma)-q \\ c_n=\dfrac{-\delta(n-2+\alpha)c_{n-2}+\left((n+\alpha-\gamma)(n-1+\alpha)-q\right)c_{n-1}}{n} \end{cases}$$

Cette solution formelle ne converge pas pour les valeurs z réelles.

L'équation de Heun-Double-Confluente : solution de forme normale autour de z=0

Traçons le diagramme de Puisieux pour le point singulier irrégulier z=0 :



La valeur γ=2 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{z^2}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximale en 1/z de* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta=\delta \quad ou \quad \beta=0$. *Dans le second cas on retombe sur le développement de Fröbenius.*

En substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{\frac{\delta}{z}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{z^2+z\gamma-\delta}{z^2} \qquad p_2(z)=-\frac{(\gamma-2)\delta+z\,(q+\delta)-z^2\alpha}{z^3}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=2-\gamma$. *La deuxième solution en forme normale s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{\frac{\delta}{z}}z^{2-\gamma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun Bi-confluente, il vient alors une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients du développement :*

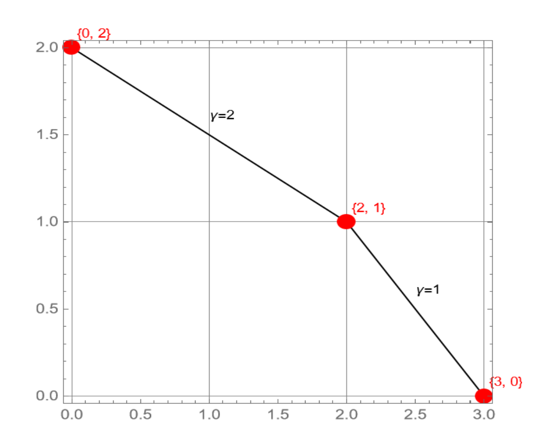
$$y(z)=e^{\frac{\delta}{z}}z^{2-\gamma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^l \qquad (n+1+\alpha-\gamma)\,c_{n-1}+((n+1)(n+2-\gamma)-q-\delta)\,c_n-\delta(n+1)\,c_{n+1}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\dfrac{2-\gamma-q-\delta}{\delta} \\ c_n=\dfrac{(n+\alpha-\gamma)c_{n-2}+(n(n+1-\gamma)-q-\delta)c_{n-1}}{n\delta}\end{cases}$$

L'équation de Heun-Double-Confluente : solution de forme normale autour de z=∞

Si l'on transforme l'équation Bi-confluente par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=-\frac{1+z\,(\gamma-2+z\delta)}{z^2} \qquad p_2(z)=\frac{\alpha-q\,z}{z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La première valeur γ=1, correspond au développement de Fröbenius, déjà étudiée. La deuxième valeur γ=3 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{z^2}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta=-1 \quad ou \quad \beta=0$. *Dans le second cas on retombe sur le développement de Fröbenius.*

Donc en substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{-\frac{1}{z}}g(z)$, *il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=-\frac{z^2\delta+z(\gamma-2)-1}{z^2} \qquad p_2(z)=-\frac{\gamma-\alpha+z\,(q+\delta)}{z^3}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\gamma-\alpha$. *La deuxième solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{-z}z^{\alpha-\gamma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun Bi-confluente, il vient alors une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{-z}z^{\alpha-\gamma}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l} \qquad \delta(1-n+\alpha-\gamma)\,c_{n-1}+((n+1-\alpha)(n-\alpha+\gamma)-\delta-q)\,c_n+(n+1)\,c_{n+1}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=q-a(1-\alpha) \\ c_n=-\dfrac{\delta(2-n+\alpha-\gamma)\,c_{n-2}+((n-\alpha)(n-1-\alpha+\gamma)-\delta-q)\,c_{n-1}}{n}\end{cases}$$

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Double-Confluente

Partant de l'équation de Heun-Double-Confluente algébrique :

$$y''(z)+\left(\frac{\delta}{z^2}+\frac{\gamma}{z}+1\right)y'(z)+\frac{\alpha\,z-q}{z^2}\;y(z)=0$$

Et par le changement de fonction : $y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}\,e^{-\frac{z}{2}+\frac{\delta}{2z}}w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$. *Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\alpha-\frac{\gamma}{2}}{z}+\frac{\gamma(2-\gamma)-2\delta-4q}{4z^2}+\frac{\delta\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}{z^3}-\frac{\delta^2}{4z^4}\right)y(z)=0$$

La triple confluence à partir de la bi-confluence de l'équation de Heun

On applique le processus limite suivant à l'opérateur différentiel de bi-confluence :

$$L^{[0;2]}(a\,;\alpha,\gamma\,;z)=z\,\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+a\,z+\gamma\right)\frac{d}{dz}+\alpha\,z$$

$$z\to\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\quad a\to-\frac{2}{\varepsilon^3}\quad\gamma\to\frac{1}{\varepsilon^6}+\frac{a}{\varepsilon^2}\quad\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to0}\;\varepsilon\left(L^{[0;2]}\left(-\frac{2}{\varepsilon^3}\,;\alpha,\frac{1}{\varepsilon^6}+\frac{a}{\varepsilon^2}\,;\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\,;z\right)-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\;\varepsilon\times\left\{\varepsilon^2\left(\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon\left(\left(\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)^2-\frac{2}{\varepsilon^3}\left(\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)+\frac{1}{\varepsilon^6}+\frac{a}{\varepsilon^2}\right)\frac{d}{dz}+\alpha\left(\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\;\left\{\varepsilon^3\left(\frac{z}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon^2\left(\frac{z^2}{\varepsilon^2}+\frac{a}{\varepsilon^2}\right)\frac{d}{dz}+\varepsilon\,\alpha\,\frac{z}{\varepsilon}\right\}=\frac{d^2}{dz^2}+\left(z^2+a\right)\frac{d}{dz}+\alpha\,z$$

$$L^{[;3]}(a\,;\alpha;z)\{y(z)\}=q\,y(z)\Leftrightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left(z^2+a\right)\frac{d\,y(z)}{dz}+\left(\alpha\,z-q\right)y(z)=0$$

Par une combinaison d'une translation et d'une homothétie, on parvient à une forme générale de l'équation tri-confluente (celle donnée par Mathematica par exemple) :

$$\begin{cases}\tilde z=\gamma\,z-\delta\\ z=\dfrac{\tilde z+\delta}{\gamma}\end{cases}\Rightarrow\gamma^2\,\frac{d^2y(\tilde z)}{d\tilde z^2}+\gamma\left(\left(\frac{\tilde z+\delta}{\gamma}\right)^2+a\right)\frac{d\,y(\tilde z)}{d\,\tilde z}+\left(\alpha\,\frac{\tilde z+\delta}{\gamma}-q\right)y(\tilde z)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y(\tilde z)}{d\tilde z^2}+\left(\frac{1}{\gamma^3}\left(\tilde z^2+2\,\delta\,\tilde z+\delta\right)+\frac{a}{\gamma}\right)\frac{d\,y(\tilde z)}{d\,\tilde z}+\left(\frac{\alpha}{\gamma^3}\tilde z+\frac{\delta}{\gamma^3}-\frac{q}{\gamma}\right)y(\tilde z)=0$$

$$\tilde\varepsilon=\frac{1}{\gamma^3}\qquad\tilde\delta=\frac{2\,\delta}{\gamma^3}\qquad\tilde\gamma=\frac{\delta}{\gamma^3}+\frac{a}{\gamma}\qquad\tilde\alpha=\frac{\alpha}{\gamma^3}\qquad\tilde q=\frac{q}{\gamma}-\frac{\delta}{\gamma^3}$$

$$\Rightarrow y''(\tilde z)+\left(\tilde\varepsilon\,\tilde z^2+\tilde\delta\,\tilde z+\tilde\gamma\right)y'(\tilde z)+\left(\tilde\alpha\,\tilde z-\tilde q\right)y(\tilde z)=0$$

Supposons maintenant que les deux nouveaux paramètres $\breve{\gamma}$ et $\breve{\delta}$ soit respectivement $\breve{\gamma}$=0 et $\breve{\varepsilon}$=1, il vient :

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma^3} = 1 \Rightarrow \gamma = 1 \quad et \quad \widetilde{\gamma} = \frac{\delta}{\gamma^3} + \frac{a}{\gamma} = 0 \Rightarrow a = -\delta \Rightarrow \widetilde{\delta} = 2\,\delta \quad \widetilde{\alpha} = \alpha \quad \widetilde{q} = q - \delta$$
$$\Rightarrow y''(\widetilde{z}) + \widetilde{z}\left(\widetilde{z} + \widetilde{\delta}\right) y'(\widetilde{z}) + \left(\alpha\,\widetilde{z} - \widetilde{q}\right) y(\widetilde{z}) = 0$$

Il s'agit bien d'une simple translation de variable :

$$\begin{cases} \widetilde{z} = z - \delta \\ z = \widetilde{z} + \delta \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 y(\widetilde{z})}{d\widetilde{z}^2} + \left((\widetilde{z} + \delta)^2 + a\right)\frac{d\,y(\widetilde{z})}{d\,\widetilde{z}} + \left(\alpha\,\widetilde{z} + \delta - q\right) y(\widetilde{z}) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2 y(\widetilde{z})}{d\widetilde{z}^2} + \left(\widetilde{z}^2 + 2\,\delta\,\widetilde{z} + \delta + a\right)\frac{d\,y(\widetilde{z})}{d\,\widetilde{z}} + \left(\alpha\,\widetilde{z} + \delta - q\right) y(\widetilde{z}) = 0$$
$$\widetilde{\delta} = 2\,\delta \quad a = -\delta \quad \widetilde{q} = q - \delta \Rightarrow y''(\widetilde{z}) + \widetilde{z}\left(\widetilde{z} + \widetilde{\delta}\right) y'(\widetilde{z}) + \left(\alpha\,\widetilde{z} - \widetilde{q}\right) y(\widetilde{z}) = 0$$

On parvient à la forme de l'équation tri-confluente donnée par « NIST Handbook of Mathematical Functions, Heun functions » formule 31.12.4.

Seul le point z=∞ est un point singulier irrégulier. L'équation différentielle est de rang 3. L'équation indicielle en z=∞ est de degré 1 : $\rho - \alpha = 0$. *Cela indique que la solution autour de z=∞ peut formellement se développer comme une solution de Fröbenius sans pour autant que la série converge.*

<u>L'équation de Heun-Tri-Confluente : solution formelle de Fröbenius autour de z=∞, exposant caractéristique ρ=α</u>

La solution formelle de l'expression suivante de l'équation Ti-Confluente suit une récurrence à quatre termes :

$$y''(z) + z\,(z + \gamma)\,y'(z) + (\alpha\,z - q)\,y(z) = 0 \qquad y(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{c_n}{z^n}$$
$$(n+\alpha)(n-1+\alpha)\,c_{n-1} - (\gamma(n+1+\alpha)+q)\,c_{n+1} - (n+2)\,c_{n+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = -q - \alpha\,\gamma \quad c_2 = -\dfrac{q + (\alpha+1)\,\gamma}{2}\,c_1 \\ c_n = \dfrac{(n-2+\alpha)(n-3+\alpha)c_{n-3} - (\gamma(n-1+\alpha)+q)\,c_{n-1}}{n} \end{cases}$$

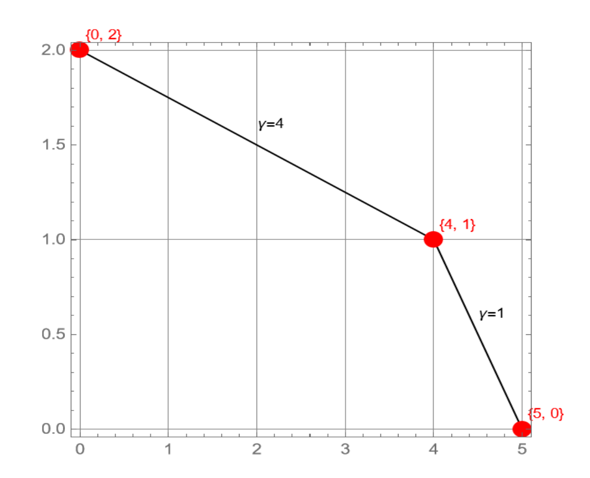
Cette solution formelle ne converge pas pour les valeurs z réelles.

<u>L'équation de Heun-Tri-Confluente : solution de forme normale autour de z=∞</u>

Si l'on transforme l'équation Tri-confluente par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z) = 1 \qquad p_1(z) = -\frac{1 + z\gamma - 2z^3}{z^4} \qquad p_2(z) = \frac{\alpha - q\,z}{z^5}$$
$$p_0(z)y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)\,y(z) = 0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La première valeur γ=1, correspond au développement de Fröbenius, déjà étudiée. La deuxième valeur γ=4 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}+\frac{\beta_3}{z^3}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{z^2}-2\frac{\beta_2}{z^3}-3\frac{\beta_3}{z^4}$. *Pour déterminer β1,β2 et β3, il convient d'annuler les trois termes de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :*

$$\beta_1=0 \quad \beta_2=-\frac{\gamma}{2} \quad \beta_3=-\frac{1}{3} \quad ou \quad \beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$

Dans le second cas on retombe sur le développement de Fröbenius. Donc en substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{-\frac{\gamma}{2z^2}-\frac{1}{3z^3}}g(z)$, *il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{1+2z^3+z\gamma}{z^4} \qquad p_2(z)=-\frac{2-\alpha+(q+\gamma)z}{z^5}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=2-\alpha$.

La deuxième solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit : $y(z)=e^{-\frac{\gamma z^2}{2}-\frac{z^3}{3}}z^{\alpha-2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun Bi-confluente, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{-\frac{\gamma z^2}{2}-\frac{z^3}{3}}z^{\alpha-2}\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$$

$$(n+1-\alpha)(n+2-\alpha)\,c_{n-1}+(\gamma(n+2-\alpha)-q)\,c_{n+1}+(n+2)\,c_{n+2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}c_0=1 \quad c_1=q+\gamma(\alpha-1) \quad c_2=\frac{\gamma(\alpha-2)+q}{2}c_1\\ c_n=-\frac{(n-1-\alpha)(n-\alpha)c_{n-3}+(\gamma(n-\alpha)-q)\,c_{n-1}}{n}\end{cases}$$

Forme équivalente de l'équation de Heun-Tri-Confluente : l'oscillateur quartique, potentiel de Shrödinger

Choisissons une forme équivalente de l'équation de Heun-Tri-Confluente :

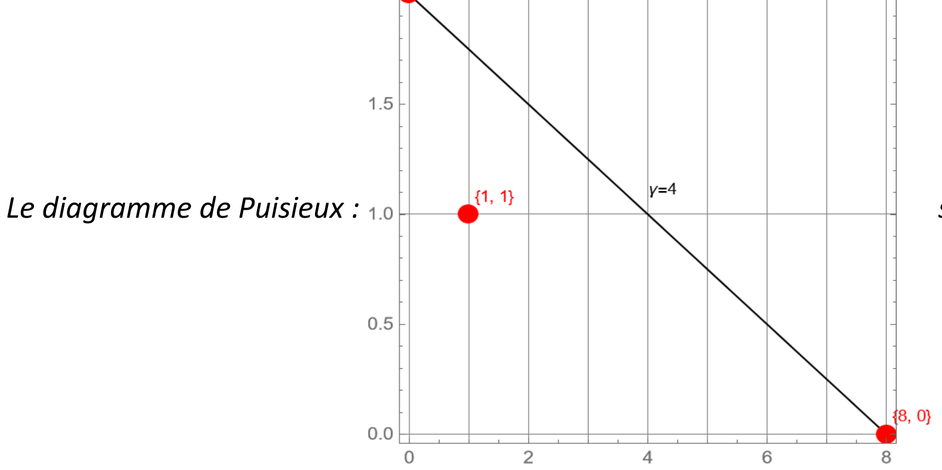
$$y''(z)-(z^2+a)\,y'(z)+(\lambda-\alpha\,z)\,y(z)=0$$

A l'aide du changement de fonction : $y(z)=e^{\frac{\gamma z}{2}+\frac{z^3}{6}}u(z)$*, cette équation de Heun-Tri-Confluente devient l'équation de l'oscillateur quartique :*

$$y''(z)-(z^2+a)\,y'(z)+(\lambda-\alpha\,z)\,y(z)=0 \quad y(z)=e^{\frac{\gamma z}{2}+\frac{z^3}{6}}u(z)$$
$$\Leftrightarrow u''(z)+\left(\lambda+(1-\alpha)\,z-\frac{(a+z^2)^2}{4}\right)u(z)=0$$

Le point singulier à l'infini est irrégulier pour cette équation de l'oscillateur quartique. On ne peut directement construire de développement de Fröbenius (pas de solution régulière existante). Par contre la forme normale se construit toujours à l'aide du changement de variable z->1/z donnant l'équation différentielle :

$$y''(z)+\left((1-\alpha)\,z-\frac{(a+z^2)^2}{4}+\lambda\right)y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)-\frac{1}{4\,z^8}\left((a\,z^2+1)^2+4z^3(\alpha-1-z\lambda)\right)y(z)=0$$

Le diagramme de Puisieux : 

suggère une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}+\frac{\beta_3}{z^3}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{z^2}-2\frac{\beta_2}{z^3}-3\frac{\beta_3}{z^4}$. *Pour déterminer β1,β2 et β3, il convient d'annuler les trois termes de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta_1=\varepsilon\frac{a}{2}\quad\beta_2=0\quad\beta_3=\varepsilon\frac{1}{6}\quad\varepsilon=\pm1$. *Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\varepsilon a}{2z}+\frac{\varepsilon}{6z^3}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2z^3-\varepsilon(1+a\,z^2)}{z^4} \qquad p_2(z)=\frac{1+\varepsilon-\alpha+z\lambda}{z^5}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho = 1 + \varepsilon(1-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = 1 \to \rho = 2-\alpha \\ \varepsilon = -1 \to \rho = \alpha \end{cases}$ *. La solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z) = e^{\frac{\varepsilon}{2}\left(a\,z + \frac{z^3}{3}\right)} z^{\varepsilon(\alpha-1)-1} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{c_l}{z^l}$ *avec* $\varepsilon = \pm 1$*. Injectons cette forme dans l'équation de l'oscillateur quartique, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z) = e^{\frac{\varepsilon}{2}\left(a\,z + \frac{z^3}{3}\right)} z^{\varepsilon(\alpha-1)-1} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{c_l}{z^l} \qquad \begin{cases} \varepsilon^2 = 1 \quad c_0 = 1 \quad c_1 = \varepsilon\,\lambda \quad c_2 = \dfrac{a\varepsilon(\varepsilon(\alpha-1)-1)\,c_0 + \lambda\,c_1}{2\varepsilon} \\ -n\,\varepsilon\,c_n + \lambda\,c_{n-1} + a\varepsilon(\varepsilon(\alpha-1)+1-n)\,c_{n-2} + (n-1+\varepsilon(1-\alpha))(n-2+\varepsilon(1-\alpha))\,c_{n-3} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon = 1 \to \begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = \lambda \quad c_2 = \dfrac{a(\alpha-2)\,c_0 + \lambda\,c_1}{2} = \dfrac{\lambda^2 + a(\alpha-2)}{2} \\ -nc_n + \lambda\,c_{n-1} - a(n-\alpha)\,c_{n-2} + (n-\alpha)(n-\alpha-1)\,c_{n-3} = 0 \Leftrightarrow nc_n - \lambda\,c_{n-1} - a(\alpha-n)\,c_{n-2} - (\alpha-n)(\alpha-n+1)\,c_{n-3} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon = -1 \to \begin{cases} c_0 = 1 \quad c_1 = -\lambda \quad c_2 = -\dfrac{a\,\alpha\,c_0 + \lambda\,c_1}{2} = \dfrac{\lambda^2 - a\,\alpha}{2} \\ nc_n + \lambda\,c_{n-1} + a(n+\alpha-2)\,c_{n-2} + (n+\alpha-2)(n+\alpha-3)\,c_{n-3} = 0 \end{cases}$$

Cette forme normale est donnée sous une forme assez similaire dans l'article de 2013 de « V.I.Osherov.V.G.Ushakov -Stark problem in terms of the Stokes multipliers for the triconfluent Heun equation » (formules de récurrence 38, 40, 41 et 42). Dans cet article la question de la convergence de la forme normale est étudiée à l'aide des multiplicateurs de Stockes).

Les confluences faibles (ou réduites) de Slavyanov : la confluence réduite simple

La confluence réduite simple de l'équation est obtenue à partir de l'équation originale de Heun par le processus limite suivant :

$$L^{[0,0,0;0]}(a\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z) = z\,(z-1)\,(z-a)\,\frac{d^2}{dz^2} + \big(\gamma(z-1)\,(z-a) + \delta\,z\,(z-a) + z\,(z-1)(\alpha+\beta+1-\gamma-\delta)\big)\frac{d}{dz} + \alpha\,\beta\,z$$

$$\textit{Equation de Heun}\quad \big(L^{[0,0,0;0]}(a\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta\,;z) - q\big)\{y(z)\} = 0$$

$$a \to \frac{1}{\varepsilon}\quad \beta \to \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\quad \alpha \to \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\quad q \to \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\ -\varepsilon\left(L^{[0,0,0;0]}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,;\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}},\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}},\gamma,\delta\,;z\right) - \frac{q}{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ -\varepsilon \times \left\{z\,(z-1)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{d^2}{dz^2} + \left(\gamma(z-1)\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right) + \delta\,z\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right) + z\,(z-1)\left(2\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}+1-\gamma-\delta\right)\right)\frac{d}{dz} + \frac{a}{\varepsilon}\,z - \frac{q}{\varepsilon}\right\}$$

$$= z\,(z-1)\,\frac{d^2}{dz^2} + \big(\gamma(z-1) + \delta\,z\big)\frac{d}{dz} + q - a\,z$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ -\varepsilon\left(L^{[0,0,0;0]}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,;\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}},\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}},\gamma,\delta\,;z\right) - q\right) = z\,(z-1)\,\frac{d^2}{dz^2} + \big(\gamma(z-1) + \delta\,z\big)\frac{d}{dz} + q - a\,z$$

$$\Leftrightarrow z\,(z-1)\,y''(z) + \big(\gamma(z-1) + \delta\,z\big)\,y'(z) + (q - a\,z)\,y(z) = 0 \Leftrightarrow y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right)y'(z) + \frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z) = 0$$

Le point z=0 est un point singulier régulier d'exposants ρ=0 et ρ=1-γ. Le point z=1 est un point singulier régulier d'exposants ρ=0 et ρ=1-δ. Le point z=∞ est un point singulier irrégulier. Le rang de l'équation différentielle en ce point est 1/2, ce qui conduit à rechercher une solution sous forme sous-normale (voir L.W.Thomé, E.L.Ince et A.R.Forsyth).

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Confluente-Réduite

Partant de l'équation de Heun-Confluente-Réduite algébrique :

$$y''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right)y'(z) + \frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z) = 0$$

Et par le changement de fonction : $y(z) = z^{-\frac{\gamma}{2}}\,(z-1)^{-\frac{\delta}{2}}\,w(z)\quad puis\quad w(z) \to y(z)$. *Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z) + \left(\frac{B}{z} + \frac{D}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{E}{(z-1)^2}\right)y(z) = 0$$

$$B = -q + \frac{\gamma\,\delta}{2}\quad D = \frac{\gamma(2-\gamma)}{4}\quad C = q - a - \frac{\gamma\,\delta}{2}\quad E = \frac{\delta(2-\delta)}{4}$$

<u>L'équation de Heun-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=0 :</u> $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n \qquad -\alpha\, c_{n-1}+\left(n(n-1+\gamma+\delta)+q\right)c_n-(n+1)(n+\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=\frac{q}{\gamma} \qquad c_n=\frac{\left((n-1)(n-2+\gamma+\delta)+q\right)c_{n-1}-\alpha\, c_{n-2}}{n(n-1+\gamma)}$$

Comme le point z=0 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

<u>L'équation de Heun-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=1-γ :</u> $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n \qquad -\alpha\, c_{n-1}+\left((n+1-\gamma)(n+\delta)+q\right)c_n-(n+1)(n+2-\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=\frac{q+\delta(1-\gamma)}{2-\gamma} \qquad c_n=\frac{\left((n-\gamma)(n-1+\delta)+q\right)c_{n-1}-\alpha\, c_{n-2}}{n(n+1-\gamma)}$$

Comme le point z=0 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

<u>L'équation de Heun-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=1, exposant caractéristique ρ=0 :</u> $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n (z-1)^n \qquad -\alpha\, c_{n-1}+\left(n(n-1+\gamma+\delta)-\alpha+q\right)c_n+(n+1)(n+\delta)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=\frac{-q+\alpha}{\delta} \qquad c_n=-\frac{\left((n-1)(n-2+\gamma+\delta)-\alpha+q\right)c_{n-1}-\alpha\, c_{n-2}}{n(n-1+\delta)}$$

Comme le point z=1 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

<u>L'équation de Heun-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=1, exposant caractéristique ρ=1-δ :</u> $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$

La solution suit une récurrence à trois termes :

$$y(z)=(z-1)^{1-\delta}\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n (z-1)^n \qquad -\alpha\, c_{n-1}+\left((n+1-\delta)(n+\gamma)-\alpha+q\right)c_n+(n+1)(n+2-\delta)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=-\frac{\gamma(1-\delta)-\alpha+q}{2-\delta} \qquad c_n=-\frac{\left((n-\delta)(n-1+\gamma)-\alpha+q\right)c_{n-1}-\alpha\, c_{n-2}}{n(n+1-\delta)}$$

Comme le point z=1 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

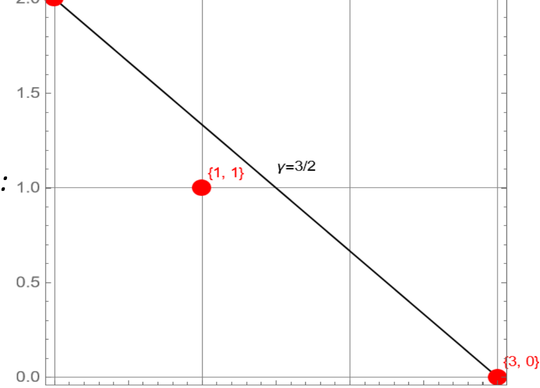
L'équation de Heun-Confluente-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=∞:

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{q-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$$

Si l'on transforme l'équation Heun-Confluente-Réduite par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=-\frac{1+z\gamma-2z^3}{z^4} \qquad p_2(z)=\frac{\alpha-q\,z}{z^5}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=3/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{\sqrt{z}}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{2z^{3/2}}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta^2=4\alpha$. *Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}g(z) \quad t=\sqrt{z}\rightarrow g(t) \quad puis \quad t\rightarrow z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2\beta(1-z^2)+2z\,(1-z^2)(2\gamma-3)+2\delta\,z}{z^2(z^2-1)} \qquad p_2(z)=\frac{\beta(z^2-1)(2\gamma-1)+4z(\alpha-q)-2\beta\,\delta}{z^3(z^2-1)}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\gamma+\delta-\frac{1}{2}$. *La solution en forme sous-normale (en revenant à z->1/√z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{\beta\sqrt{z}}z^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma+\delta}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Confluente-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\beta\sqrt{z}}z^{\frac{1}{4}-\frac{\gamma+\delta}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}} \qquad -(2n+1+2\delta-2\gamma)(2n-3+2\delta+2\gamma)\,c_{n-1}+8\beta(n+\delta)\,c_n+(16\,(q-\alpha)+(2n+5-2\delta-2\gamma)(2n+1+2\delta+2\gamma))\,c_{n+1}-8\beta(n+2)\,c_{n+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\dfrac{(16\,(q-\alpha)-(2\delta+2\gamma-3)(2\delta+2\gamma-1))}{8\beta}c_0 \quad c_2=\dfrac{8\beta\delta\,c_0+(16\,(q-\alpha)+(5-2\delta-2\gamma)(1+2\delta+2\gamma))\,c_1}{16\beta} \\ c_n=\dfrac{-(2n-7+2\delta+2\gamma)(2n-3+2\delta-2\gamma)\,c_{n-3}+8\beta(n-2+\delta)\,c_{n-2}+(16\,(q-\alpha)+(2n+1-2\delta-2\gamma)(2n-3+2\delta+2\gamma))\,c_{n-1}}{8\beta\,n} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

Les confluences faibles (ou réduites) de Slavyanov : la bi-confluence réduite

La Bi-confluence réduite de l'équation de Heun est obtenue à partir de l'équation confluente simple de Heun par le changement de fonction suivant qui permet d'introduire un nouvel opérateur différentiel:

$$z\,(z-1)\,y''(z)+(\gamma(z-1)+\delta\,z-a\,z\,(z-1))\,y'(z)+(\lambda-\alpha\,a\,z)y(z)=0$$

$$y(z)=(z-1)^{-\frac{\delta}{2}}e^{\frac{a\,z}{2}}u(z)\quad puis\quad u(z)\to y(z)$$

$$\Rightarrow y''(z)+\frac{\gamma}{z}y'(z)+\left(-\frac{a^2}{4}+\frac{\delta(2-\delta)}{4(z-1)^2}-\frac{\gamma\,\delta}{2z(z-1)}+\frac{a}{2}\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta-2\alpha}{z-1}\right)+\frac{\lambda}{z(z-1)}\right)y(z)=0 .$$

L'équation différentielle résultante a les mêmes points singuliers réguliers et irrégulier avec également le même rang. Par processus limite suivant :

$$z\to\zeta\,z\,\varepsilon^2\quad a\to1\quad \alpha\to-\zeta^{-2}\tilde{a}\varepsilon^{-4}+\frac{\varepsilon^{-6}}{4}\quad \delta\to\varepsilon^{-3}\quad \lambda\to\frac{\gamma}{2}\varepsilon^{-3}+\mu\,\zeta^{-1}\varepsilon^{-2}\quad \zeta=4^{1/3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\ \zeta^2\varepsilon^4\left(y''(z)+\frac{\gamma}{z}y'(z)+\left(-\frac{a^2}{4}+\frac{\delta(2-\delta)}{4(z-1)^2}-\frac{\gamma\,\delta}{2z(z-1)}+\frac{a}{2}\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta-2\alpha}{z-1}\right)+\frac{\lambda}{z(z-1)}\right)y(z)\right)=$$

$$=y''(z)+\frac{\gamma}{z}y'(z)-\left(\tilde{a}+z+\frac{\mu}{z}\right)y(z)=0$$

Puis par la dernière substitution : $\tilde{a}\to a\quad \mu\to-\lambda$*, on obtient l'équation différentielle de Heun Bi-Confluente-Réduite :* $y''(z)+\frac{\gamma}{z}y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$

Le point z=0 est un point singulier régulier d'exposants ρ=0 et ρ=1-γ. Le point z=∞ est un point singulier irrégulier. Le rang de l'équation différentielle en ce point est 3/2, ce qui conduit à rechercher une solution sous forme sous-normale (voir L.W.Thomé, E.L.Ince et A.R.Forsyth).

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite

Partant de l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite algébrique : $y''(z)+\frac{\gamma}{z}y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$

Et par le changement de fonction : $y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$*. Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z)+\left(-z-a+\frac{\lambda}{z}+\frac{\gamma(2-\gamma)}{z^2}\right)y(z)=0$$

Forme alternative de l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite

Partant de l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite algébrique : $y''(z)+\frac{\gamma}{z}\,y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$

Et par le changement de fonction : $y(z)=z^{\frac{1-\gamma}{2}}\,w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$*. Il vient l'équation différentielle :*

$$z\,y''(z)+y(z)+\left(\lambda-z^2-a\,x-\frac{(1-\gamma)^2}{4z}\right)y(z)=0$$

L'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=0 : $y''(z)+\frac{\gamma}{z}\,y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$

La solution suit une récurrence à quatre termes :

$$y(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n \qquad -c_{n-1}-a\,c_n+\lambda\,c_n-(n+2)(n+1+\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=-\frac{\lambda}{\gamma}c_0 \qquad c_2=\frac{a\,c_0-\lambda\,c_1}{2(1+\gamma)} \qquad c_n=\frac{-\lambda\,c_{n-1}+a\,c_{n-2}+c_{n-3}}{n(n-1+\gamma)}$$

Comme le point z=0 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

L'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=0, exposant caractéristique ρ=1-γ : $y''(z)+\frac{\gamma}{z}\,y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$

La solution suit une récurrence à quatre termes :

$$y(z)=z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{n=+\infty}c_n z^n \qquad -c_{n-1}-a\,c_n+\lambda\,c_n+(n+2)(n+3-\gamma)\,c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=-\frac{\lambda}{2-\gamma}c_0 \qquad c_2=\frac{a\,c_0-\lambda\,c_1}{2(3-\gamma)} \qquad c_n=\frac{-\lambda\,c_{n-1}+a\,c_{n-2}+c_{n-3}}{n(n+1-\gamma)}$$

Comme le point z=0 est un point singulier régulier la convergence de ce développement est assurée dans un rayon donné.

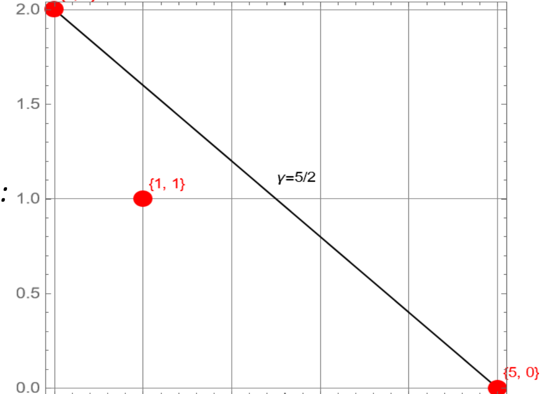
L'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=∞:

$$y''(z)+\frac{\gamma}{z}\,y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-a-z\right)y(z)=0$$

Si l'on transforme l'équation Heun-Bi-Confluente-Réduite par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2-\gamma}{z} \qquad p_2(z)=\frac{\lambda\,z^2-a\,z-1}{z^5}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=5/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{\sqrt{z}}+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\beta_3}{z\sqrt{z}}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{2z^{3/2}}-\frac{\beta_2}{z^2}-\frac{3\beta_3}{2z^{5/2}}$. *Pour déterminer β1,β2,β3, il convient d'annuler les trois termes de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta_1^{\ 2}=a^2 \quad \beta_2=0 \quad \beta_3^{\ 2}=\frac{4}{9} \quad et \quad \beta_1\beta_3=\frac{2a}{3}$. *Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta_1}{\sqrt{z}}+\frac{\beta_3}{z\sqrt{z}}}g(z) \quad t=\sqrt{z}\to g(t) \quad puis \quad t\to z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{(3-2\gamma)\,z^3-2z^2\beta_1-6\beta_3}{z^4} \qquad p_2(z)=\frac{\beta_1(2\gamma-1)\,z^2+\left(a^2+4\lambda\right)z+3\beta_3(2\gamma+1)}{z^5}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\frac{1}{2}+\gamma$. *La solution en forme sous-normale (en revenant à z->1/√z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{\beta_1\sqrt{z}+\beta_3 z\sqrt{z}}z^{-\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\beta_1\sqrt{z}+\beta_3 z\sqrt{z}}z^{-\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}} \qquad \frac{1}{4}(2n+3-2\gamma)(2n-1+2\gamma)\,c_{n-1}-2\beta_1(n+1)\,c_n+\left(a^2+4\lambda\right)c_{n+1}-6\beta_3(n+2)\,c_{n+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_0=1 \quad c_1=\dfrac{a^2+4\lambda}{6\beta_3 n}c_0 \quad c_2=\dfrac{-2\beta_1c_0+\left(a^2+4\lambda\right)c_1}{12\beta_3 n} \\ c_n=\dfrac{(2n-1-2\gamma)(2n-5+2\gamma)c_{n-3}-8\beta_1(n-1)c_{n-2}+4\left(a^2+4\lambda\right)c_{n-1}}{24\beta_3 n}\end{cases}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

<u>Les confluences faibles (ou réduites) de Slavyanov : la double-confluence réduite</u>

La confluence réduite double de l'équation de Heun est obtenue tout d'abord par une modification de l'équation de Heun confluente : $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}-a\right)y'(z)+\frac{\lambda-\alpha\, a\, z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$ *Par le changement de fonction :* $y(z)=z^{-\frac{\gamma}{2}}\,(z-1)^{-\frac{\delta}{2}}\,w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$*. Il vient l'équation différentielle :*

$$z^2 y'(z)-a\,z^2 y'(z)+\left(\frac{\gamma(2-\gamma)}{4}+\frac{\delta(2-\delta)}{4}\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}\left(\lambda-\frac{\gamma\,\delta}{2}\right)+a\,z\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{z}{z-1}\frac{\delta-2\alpha}{2}\right)\right)y(z)=0$$

Par le processus limite : $z\to z\varepsilon^{-2}\quad a\to\varepsilon^{-2}\quad \varepsilon\to 0$ *sont préservées les limites respectives :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\; z^2 y''(z)=z^2 y''(z)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\; z^2 y'(z)=z^2 y'(z)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\; a\,z\,y(z)=z\,y(z)$$

De plus les expressions suivantes se factorisent :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\gamma(2-\gamma)}{4}+\frac{\delta(2-\delta)}{4}\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}\left(\lambda-\frac{\gamma\,\delta}{2}\right)\right)=\lambda-\frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)}{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{z}{z-1}\frac{\delta-2\alpha}{2}\right)=\frac{\gamma+\delta-2\alpha}{2}$$

En complétant ainsi le processus limite : $\gamma\to 2\sqrt{-p}\,\varepsilon^{-1}\quad \lambda\to\mu+\frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)}{4}\quad \alpha\to\tilde{\alpha}+\frac{\gamma+\delta}{2}\quad \varepsilon\to 0$

Il vient l'équation différentielle $z^2 y''(z)-z^2 y'(z)+\left(\mu-\tilde{\alpha}\,z-\frac{p}{z}\right)y(z)=0$ *qui devient l'équation différentielle de Heun Double-Confluente-Réduite par la substitution finale :*

$$\mu\to\lambda\quad \tilde{\alpha}\to\alpha\quad p\to a\to z^2 y''(z)-z^2 y'(z)+\left(\lambda-\alpha\,z-\frac{a}{z}\right)y(z)=0\Leftrightarrow y''(z)-y'(z)+\left(-\frac{\alpha}{z}+\frac{\lambda}{z^2}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$$

Le point z=0 est un point singulier irrégulier. Le rang de l'équation différentielle en ce point est 1/2, ce qui conduit à rechercher une solution sous forme sous-normale (voir L.W.Thomé, E.L.Ince et A.R.Forsyth). Le point z=∞ est un point singulier irrégulier de rang 1, ce qui conduit à rechercher une solution sous forme normale.

Si dans le processus limite aucun changement n'est imposé à la valeur de λ et γ. Mais que l'on fixe δ=-γ, alors on obtient : $z\to z\varepsilon^{-2}\quad a\to\varepsilon^{-2}\quad \delta=-\gamma\quad \varepsilon\to 0\to z^2 y''(z)-z^2 y'(z)+(\lambda-\alpha\,z)\,y(z)=0$*. Si l'on fixe δ=2-γ, alors on obtient une équation différentielle similaire :*

$$z\to z\varepsilon^{-2}\quad a\to\varepsilon^{-2}\quad \delta=2-\gamma\quad \varepsilon\to 0\to z^2 y''(z)-z^2 y'(z)+(\lambda+(1-\alpha)\,z)\,y(z)=0$$

Si maintenant γ varie comme a et δ=-γ, alors on obtient :

$$z\to z\varepsilon^{-2}\quad a\to\varepsilon^{-2}\quad \gamma\to 2p\varepsilon^{-2}\quad \delta=-\gamma\quad \varepsilon\to 0\to z^2 y''(z)-z^2 y'(z)+\left(\lambda-p-\alpha\,z-\frac{2p}{z}-\frac{p^2}{z^2}\right)y(z)=0$$

Forme potentielle de Shrödinger de l'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite

Partant de l'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite algébrique :

$$y''(z)-y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{\alpha}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$$

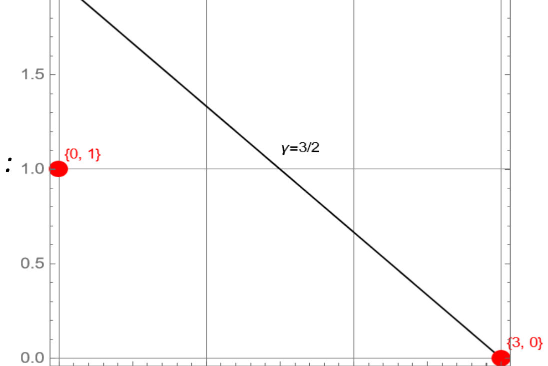
Et par le changement de fonction : $y(z)=e^{\frac{z}{2}}\,w(z)\quad puis\quad w(z)\to y(z)$*. Il vient l'équation différentielle sous forme de potentiel de Shrödinger :*

$$y''(z)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{z}+\frac{\lambda}{z^2}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$$

L'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=0:

$$y''(z)-y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{\alpha}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=3/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{\sqrt{z}}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{2z^{3/2}}$*. Pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$*. Il vient :* $\beta^2=4\,a\Leftrightarrow\beta=\pm\,2\sqrt{a}$*. Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}g(z)\quad t=\sqrt{z}\to g(t)\quad puis\quad t\to z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1\qquad p_1(z)=-\frac{2\beta+z+2z^3}{z^2}\qquad p_2(z)=\frac{3\beta+4\lambda\,z+2\beta\,z^2-4\,\alpha\,z^3}{z^3}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\frac{3}{2}$*.*

La solution en forme sous-normale s'écrit alors comme suit : $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{l/2}$ *. Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Bi-Confluente-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{l/2} \qquad 4(1-4n-4\alpha)c_{n-1}+8\beta\, c_n+\left((4n+3)(4n+7)+16\lambda\right)c_{n+1}-16\beta(n+2)c_{n+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_0=1 \quad c_1=\dfrac{16\lambda-3}{16\beta}c_0 \quad c_2=\dfrac{8\beta\, c_0+(21+16\lambda)c_1}{32\beta}\\ c_n=\dfrac{4\,(9-4n-4\alpha)c_{n-3}+8\beta\, c_{n-2}+\left((4n-5)(4n-1)+16\lambda\right)c_{n-1}}{16\beta\, n}\end{cases}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

<u>L'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite : solution de Fröbenius autour de z=∞, d'exposant ρ=α:</u> $y''(z)-y'(z)+\left(\dfrac{\lambda}{z^2}-\dfrac{\alpha}{z}-\dfrac{a}{z^3}\right)y(z)=0$

L'injection de la forme suivante dans l'équation différentielle de Heun-Double-Confluente-Réduite, conduit à une récurrence à trois termes :

$$y(z)=z^{-\alpha}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{-l} \qquad -a\, c_{n-1}+\left((n+\alpha)(n+1+\alpha)+\lambda\right)c_n+(n+1)c_{n+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_0=1 \quad c_1=-\left(\alpha(1+\alpha)+\lambda\right)c_0\\ c_n=-\dfrac{-a\, c_{n-2}+\left((n+\alpha)(n-1+\alpha)+\lambda\right)c_{n-1}}{n}\end{cases}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

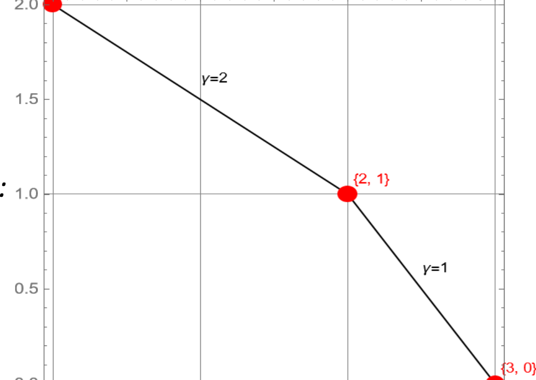
L'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite : solution formelle normale autour de z=∞:

$$y''(z)-y'(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{\alpha}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$$

Si l'on transforme l'équation Heun-Double-Confluente-Réduite par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2z+1}{z^2} \qquad p_2(z)=-\frac{a\,z^2-\lambda\,z+\alpha}{z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=1 correspond au développement de Fröbenius étudié ci-dessus. La valeur γ=2 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{z^2}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le premier terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta(\beta-1)=0\Rightarrow\beta=0 \quad ou \quad \beta=1$. *De la première valeur on retrouve encore le développement de Fröbenius. En substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{1}{z}}g(z)$, *il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2z-1}{z^2} \qquad p_2(z)=-\frac{a\,z^2-\lambda\,z+\alpha}{z^3}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=-\alpha$. *La solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{z}z^{\alpha}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Double-Confluente-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{z}z^{\alpha}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^l} \qquad a\,c_{n-1}-((n-\alpha)(n+1-\alpha)+\lambda)c_n+(n+1)c_{n+1}=0$$
$$\Leftrightarrow c_0=1 \quad c_1=(\lambda-\alpha(1-\alpha))c_0 \qquad c_n=-\frac{a\,c_{n-2}-((n-\alpha)(n-1-\alpha)+\lambda)c_{n-1}}{n}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

__Les confluences faibles (ou réduites) de Slavyanov : la double-confluence-doublement-réduite__

La double-confluence doublement réduite de l'équation de Heun est obtenue par un processus limite sur une version modifiée de l'équation de simple confluence réduite. Dans un premier temps modifions cette dernière : $q \to \lambda \to y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\frac{\lambda-a\,z}{z\,(z-1)}\,y(z)=0$. *Par le changement de fonction :* $y(z)=z^{\frac{1-\gamma}{2}}\,(z-1)^{\frac{1-\delta}{2}}\,w(z) \quad puis \quad w(z)\to y(z)$. *Il vient l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dz}\left(z(z-1)y'(z)\right)+\left(\lambda-a\,z+\frac{1}{2}-\frac{\gamma\,\delta}{2}-\frac{(1-\gamma)^2}{4}\frac{z-1}{z}-\frac{(1-\delta)^2}{4}\frac{z}{z-1}\right)y(z)=0$$

Par le processus limite : $z\to -z\varepsilon^{-2} \quad a\to -p\varepsilon^{-2} \quad \varepsilon\to 0$ *sont préservées les limites respectives :*

$$\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \left\{\frac{d}{dz}\left(z(z-1)\,y'(z)\right)\right\}=\frac{d}{dz}\left(z^2 y'(z)\right) \quad \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \ a\,z\,y(z)=p\,z\,y(z)$$

De plus l'expression suivante se factorise : $\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma\,\delta}{2}-\frac{(1-\gamma)^2}{4}\frac{z-1}{z}-\frac{(1-\delta)^2}{4}\frac{z}{z-1}\right)=-\frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)}{4}$.

Avec le choix additionnel on parvient à l'équation de Heun double-confluente-double-réduite :

$$z\to -z\varepsilon^{-2} \quad a\to -p\varepsilon^{-2} \quad \gamma\to 2\sqrt{\tilde{\gamma}}\,\varepsilon^{-1} \quad \lambda\to \mu+\frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)}{4}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \left\{\frac{d}{dz}\left(z(z-1)\,y'(z)\right)+\left(\lambda-a\,z+\frac{1}{2}-\frac{\gamma\,\delta}{2}-\frac{(1-\gamma)^2}{4}\frac{z-1}{z}-\frac{(1-\delta)^2}{4}\frac{z}{z-1}\right)y(z)\right\}=\frac{d}{dz}\left(z^2 y'(z)\right)+\left(\mu-p\,z-\frac{\tilde{\gamma}}{z}\right)y(z)=0$$

Avec un choix optionnel :

$$z\to -z\varepsilon^{-2} \quad a\to -p\varepsilon^{-2} \quad \gamma\to\tilde{\gamma}\varepsilon^{-1} \quad (\delta\to -\gamma \quad ou \quad \delta\to 2-\gamma) \quad puis \quad p\to a$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \left\{\frac{d}{dz}\left(z(z-1)\,y'(z)\right)+\left(\lambda-a\,z+\frac{1}{2}-\frac{\gamma\,\delta}{2}-\frac{(1-\gamma)^2}{4}\frac{z-1}{z}-\frac{(1-\delta)^2}{4}\frac{z}{z-1}\right)y(z)\right\}=\frac{d}{dz}\left(z^2 y'(z)\right)+\left(\mu-a\,z\right)y(z)=0$$

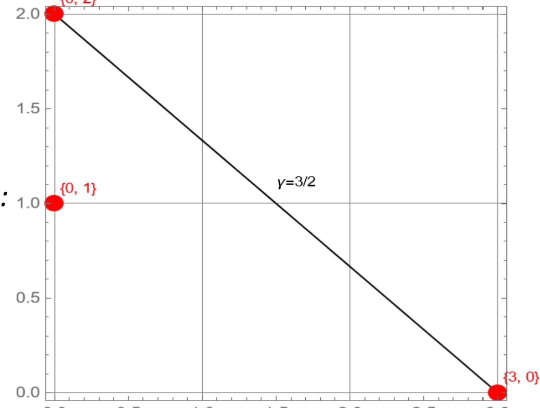
On obtient l'équation différentielle de Heun Double-Confluente-Double-Réduite en recherchant la forme de potentiel de Shrödinger à partir de l'équation précédente : $z^2 y''(z)+2z\,y'(z)+\left(\mu-p\,z-\frac{\tilde{\gamma}}{z}\right)y(z)=0$ *par le changement de fonction suivant :* $y(z)=\frac{w(z)}{z} \quad puis \quad w(z)\to y(z) \quad et \quad \mu\to\lambda \quad et \quad \tilde{\gamma}=a$. *Il vient alors :* $y''(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{p}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$. *Soit les deux formes de l'équation de Heun Double-Confluente-Double-Réduite :*

$$z^2 y''(z)+\left(\lambda-p\,z-\frac{a}{z}\right)y(z)=0 \Leftrightarrow y''(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{p}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0 \quad et \quad p=1$$

Le point z=0 est un point singulier irrégulier de rang 1/2, ce qui conduit à rechercher une solution sous-normale (voir L.W.Thomé, E.L.Ince et A.R.Forsyth). Le point z=∞ est un point singulier irrégulier de rang 1, et paradoxalement cela conduit à rechercher une solution sous-normale. Aucune des points singuliers irréguliers z=0 et z=∞ n'admet de développement de Fröbenius possible.

<u>L'équation de Heun-Double-Confluente-Double-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=0:</u> $y''(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{p}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=3/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{\sqrt{z}}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{2z^{3/2}}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta^2=4a\Leftrightarrow\beta=\pm 2\sqrt{a}$. *Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}g(z)\quad t=\sqrt{z}\to g(t)\quad puis\quad t\to z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1\qquad p_1(z)=-\frac{z+2\beta}{z^2}\qquad p_2(z)=-4p+\frac{3\beta+4\lambda z}{z^3}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier mais cette fois l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\frac{3}{2}$.

La solution en forme sous-normale s'écrit alors comme suit : $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{l/2}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Double-Confluente-Double-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à quatre termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}z^{\frac{3}{4}}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}c_l z^{l/2}\qquad -16p\,c_{n-1}+\left((2n+1)(2n+5)+16\lambda\right)c_{n+1}-8\beta(n+2)c_{n+2}=0$$
$$\Leftrightarrow c_0=1\quad c_1=\frac{16\lambda-3}{8\beta}c_0\quad c_2=\frac{16\lambda+5}{16\beta}c_1\qquad c_n=\frac{-16p\,c_{n-3}+\left((2n-3)(2n+1)+16\lambda\right)c_{n-1}}{8\beta\,n}$$

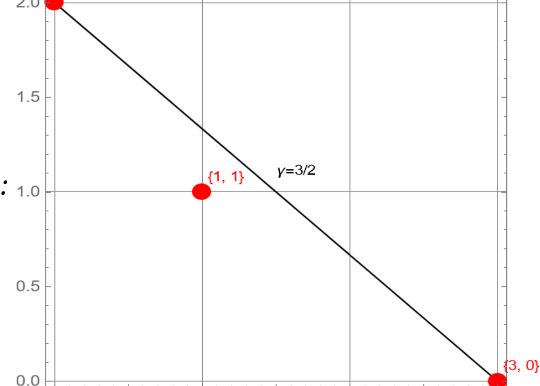
Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

L'équation de Heun-Double-Confluente-Double-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=∞: $y''(z)+\left(\frac{\lambda}{z^2}-\frac{p}{z}-\frac{a}{z^3}\right)y(z)=0$

Si l'on transforme l'équation Heun-Double-Confluente-Double-Réduite par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2}{z} \qquad p_2(z)=-\frac{a\,z^2+p-\lambda\,z}{z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=3/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{\sqrt{z}}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{2z^{3/2}}$. *Pour déterminer β, il convient d'annuler le premier terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient :* $\beta^2=4\,p\Leftrightarrow\beta=\pm 2\sqrt{p}$. *Donc en substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{\sqrt{z}}}g(z)\quad t=\sqrt{z}\rightarrow g(t)\quad puis\quad t\rightarrow z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{3z-2\beta}{z^2} \qquad p_2(z)=\frac{-z\beta+4\lambda\,z^2-4a\,z^4}{z^4}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=-\frac{1}{2}$. *La solution en forme normale (en revenant à z->1/√z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{\beta\sqrt{z}}z^{1/4}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Double-Confluente-Double-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à 4 termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\beta\sqrt{z}}z^{1/4}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}} \qquad -16\,a\,c_{n-1}+((2n+1)(2n+5)+16\lambda)\,c_{n+1}-8\beta(n+2)\,c_{n+2}=0$$
$$\Leftrightarrow c_0=1 \qquad c_1=\frac{16\lambda-3}{8\beta}c_0 \quad c_2=\frac{16\lambda+5}{16\beta}c_1 \qquad c_n=\frac{-16\,a\,c_{n-3}+((2n-3)(2n+1)+16\lambda)\,c_{n-1}}{8\beta\,n}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

Les confluences faibles (ou réduites) de Slavyanov : la Tri-confluence réduite

La Tri-confluence réduite de l'équation de Heun est obtenue à partir de la Bi-confluence réduite modifiée sous la forme de l'équation différentielle de départ :

$$z\, y''(z)+y(z)+\left(\lambda-z^2-a\,x-\frac{(1-\gamma)^2}{4z}\right)y(z)=0$$

Par le processus limite suivant :

$$z\to z\varepsilon^{-4}-\varepsilon^{-10}\quad a\to 3\varepsilon^{-10}-p\varepsilon^{2}\quad \gamma\to 1+2\varepsilon^{-15}\quad \lambda\to -\nu\,\varepsilon^{-2}+p\varepsilon^{-8}-3\varepsilon^{-20}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\quad -\varepsilon^2\left\{z\,y''(z)+y(z)+\left(\lambda-z^2-a\,x-\frac{(1-\gamma)^2}{4z}\right)y(z)\right\}=y''(z)+\left(\lambda-p\,z-z^3\right)y(z)=0$$

$$Puis\quad p\to a\quad et\quad \nu\to\lambda\quad\to\quad y''(z)+\left(\lambda-a\,z-z^3\right)y(z)=0$$

On obtient donc l'équation différentielle de Heun Tri-Confluente-Réduite :

$$y''(z)+\left(\lambda-a\,z-z^3\right)y(z)=0$$

Le point z=∞ est le seul point singulier irrégulier de rang 5/2 et cela conduit à rechercher une solution sous-normale. Le point z=∞ n'admet pas de développement de Fröbenius possible.

L'équation de Heun-Tri-Confluente-Réduite : solution formelle sous-normale autour de z=∞:

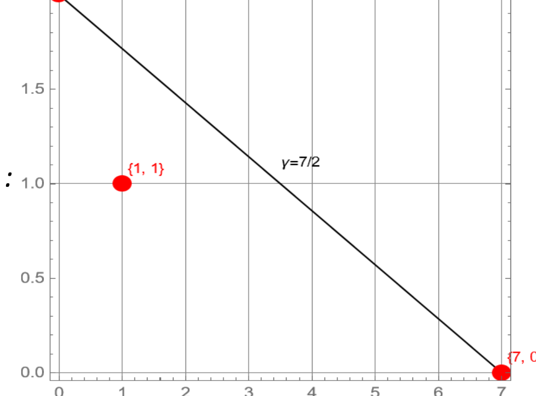
$$y''(z)+\left(\lambda-a\,z-z^3\right)y(z)=0$$

Si l'on transforme l'équation Heun-Tri-Confluente-Réduite par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :

$$p_0(z)=1\qquad p_1(z)=\frac{2}{z}\qquad p_2(z)=\frac{\lambda\,z^3-a\,z^2-1}{z^7}$$

$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=7/2 correspond à une forme sous-normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^{\rho}u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta_1}{\sqrt{z}}+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\beta_3}{z\sqrt{z}}+\frac{\beta_4}{z^2}+\frac{\beta_5}{z^2\sqrt{z}} \Rightarrow \Omega'(z)=-\frac{\beta_1}{2z^{3/2}}-\frac{2\beta_2}{2z^2}-\frac{3\beta_3}{2z^{5/2}}-\frac{4\beta_4}{2z^3}-\frac{5\beta_5}{2z^{7/2}}$.

Pour déterminer β1,β2,β3,β4,β5, il convient d'annuler les 5 premiers termes de puissance maximale en 1/z dans $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$. *Il vient le système suivant d'équation algébrique :*

$$\begin{cases} 25\,\beta_5{}^2=4 \\ \beta_4\beta_5=0 \\ 8\beta_4+15\beta_3\beta_5=0 \\ 6\beta_3\beta_4+5\beta_2\beta_5=0 \\ -4a+9\beta_3{}^2+16\beta_2\beta_4+10\beta_1\beta_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2=\beta_3=\beta_4=0 \\ \beta_1\beta_5=\frac{2a}{5} \\ \beta_1{}^2=a^2 \qquad \beta_5{}^2=\frac{4}{25} \end{cases}$$

Donc en substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{\frac{\beta_1}{\sqrt{z}}+\frac{\beta_5}{z^2\sqrt{z}}}g(z) \quad t=\sqrt{z}\to g(t) \quad puis \quad t\to z$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{3\,z^5-2\beta_1 z^4-10\beta_5}{z^6} \qquad p_2(z)=\frac{a^2z^8-\beta_1 z^9+15\,\beta_5 z^5+4\lambda\,z^6}{z^{12}}$$
$$p_0(z)g''(z)+p_1(z)g'(z)+p_2(z)\,g(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=\frac{3}{2}$. *La solution en forme normale (en revenant à z->1/√z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^{\beta_1\sqrt{z}+\beta_5 z^2\sqrt{z}}z^{-3/4}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}}$. *Injectons cette forme dans l'équation de Heun-Tri-Confluente-Réduite, il vient alors une relation de récurrence à 6 termes pour les coefficients du développement :*

$$y(z)=e^{\beta_1\sqrt{z}+\beta_5 z^2\sqrt{z}}z^{-3/4}\times\sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{c_l}{z^{l/2}} \qquad (2n-1)(2n+3)\,c_{n-2}-8\beta_1(n+1)\,c_{n-1}+4a^2c_n+16\lambda\,c_{n+2}-40\,(n+3)\beta_5 c_{n+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0=1 \qquad c_1=\frac{16\lambda}{40\beta_5}\,c_0 \qquad c_2=\frac{16\lambda}{80\beta_5}\,c_1 \qquad c_3=\frac{4a^2c_0+16\lambda\,c_2}{120\beta_5} \qquad c_4=\frac{-16\beta_1 c_0+4a^2c_1+16\lambda\,c_3}{160\beta_5} \\ c_n=\frac{(2n-3)(2n-7)\,c_{n-5}-8\beta_1(n-2)\,c_{n-4}+4a^2c_{n-3}+16\lambda\,c_{n-1}}{40\beta_5 n} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'assurance de la convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

Les confluences faibles (ou réduites) : variation sur la double-confluence réduite

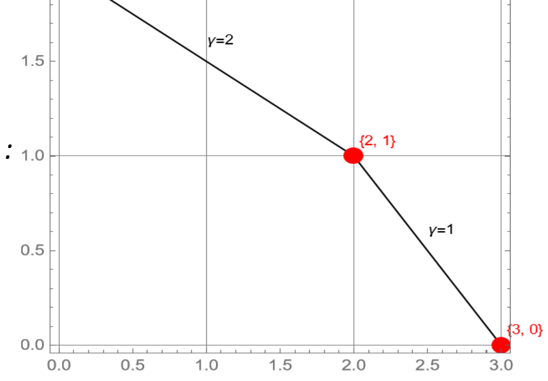
Dans l'exposé précédent deux équations dérivées de la double-confluence réduite sont apparues. La première $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + (\lambda - \alpha\, z)\, y(z) = 0$ *que je réécrirais sous cette forme équivalente à un changement des paramètres :* $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + (\lambda(1-\lambda) - \alpha\, z)\, y(z) = 0$

Et l'équation suivante : $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + \left(\lambda - p - \alpha\, z - \frac{2p}{z} - \frac{p^2}{z^2}\right) y(z) = 0$ *que je réécrirais sous cette forme équivalente à un changement des paramètres :* $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + \left(\lambda - \alpha\, z - \frac{p}{z} - \frac{p^2}{4z^2}\right) y(z) = 0$.

Pour la première équation : $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + (\lambda(1-\lambda) - \alpha\, z)\, y(z) = 0$*, le point z=0 est un point singulier régulier d'exposants caractéristiques ρ=λ et ρ=1-λ. Le développement de Frobënius d'exposant ρ=λ présente une récurrence à deux termes :* $y(z) = z^{\lambda} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \qquad c_n = \frac{n-1+\alpha+\lambda}{n(n-1+2\lambda)} c_{n-1}$*. Le développement de Frobënius d'exposant ρ=1-λ présente une récurrence à deux termes :* $y(z) = z^{1-\lambda} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \qquad c_n = \frac{n+\alpha-\lambda}{n(n+1-2\lambda)} c_{n-1}$*. Le point singulier z=∞ est irrégulier de rang 1 et d'équation indicielle* $\rho - \alpha = 0$*. Le développement de Frobënius à l'infini est une récurrence à deux termes de la forme :* $y(z) = z^{-\alpha} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \qquad c_0 = 1 \qquad c_n = -\frac{(n-1+\alpha+\lambda)(n+\alpha-\lambda)}{n} c_{n-1}$*. Ce développement ne converge manifestement pas pour les z sur l'axe réel. Pour ce qui est de la solution en forme normale. Si l'on transforme l'équation* $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + (\lambda(1-\lambda) - \alpha\, z)\, y(z) = 0$ *par le changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :*

$$p_0(z) = 1 \qquad p_1(z) = \frac{1+2z}{z} \qquad p_2(z) = \frac{\lambda(1-\lambda)z - \alpha}{z^3}$$
$$p_0(z) y''(z) + p_1(z) y'(z) + p_2(z)\, y(z) = 0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=1 correspond au développement de Fröbenius. La valeur γ=2 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z) = e^{\Omega(z)} z^{\rho} u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z) = \frac{\beta}{z} \Rightarrow \Omega'(z) = -\frac{\beta}{z^2}$*. Pour déterminer β il convient d'annuler le premier terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2 + p_1(z)\Omega'(z) + p_2(z)$*. Il vient :* $\beta = 0 \quad ou \quad \beta = 1$.

En substituant une fonction de la forme : $y(z)=e^{\frac{1}{z}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

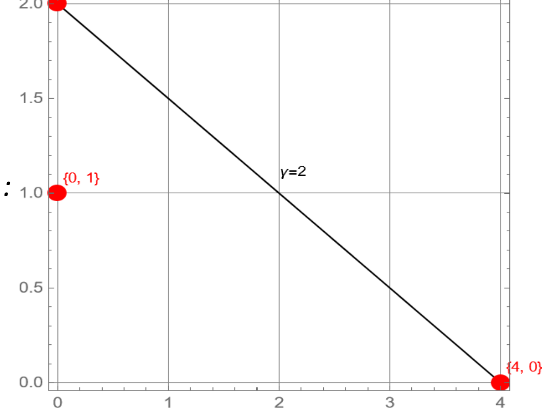
$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2z-1}{z^2} \qquad p_2(z)=\frac{\lambda(1-\lambda)z-\alpha}{z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=-\alpha$*. La solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^z z^\alpha \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l}$ *dont les coefficients du développement suivent une récurrence à deux termes :* $y(z)=e^z z^\alpha \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \qquad c_0=1 \qquad c_n=\frac{(n-1-\alpha+\lambda)(n-\alpha-\lambda)}{n}c_{n-1}$*. Il n'y a pas de convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.*

Pour la deuxième équation $z^2y''(z)-z^2y'(z)+\left(\lambda-\alpha\,z-\frac{p}{z}-\frac{p^2}{4z^2}\right)y(z)=0$ *le point z=0 est un point singulier irrégulier où l'équation différentielle est de rang 1 d'équation indicielle sans solution et se développe sous forme normale. Le point singulier z=∞ est irrégulier de rang 1 et d'équation indicielle* $\rho-\alpha=0$ *qui possède soit un développement formel de Fröbenius d'exposant* $\rho=\alpha$*, soit développement sous forme normale (solution de Thomé).*

Autour de z=0, construisons la forme normale de la solution :

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=2 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z)=e^{\Omega(z)}z^\rho u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z)=\frac{\beta}{z}\Rightarrow\Omega'(z)=-\frac{\beta}{z^2}$*. Pour déterminer β il convient d'annuler le premier terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2+p_1(z)\Omega'(z)+p_2(z)$*. Il vient :* $\beta^2=\frac{p^2}{4}\Rightarrow\beta=\pm\frac{p}{2}$*. En substituant une fonction de la forme :* $y(z)=e^{\frac{\beta}{z}}g(z)$*, il vient l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=-\frac{z^2+2\beta}{z^2} \qquad p_2(z)=\frac{2\beta-p+(\beta+\lambda)\,z+\alpha\,z^2}{z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho = 1 - \frac{p}{2\beta}$*. La solution en forme normale s'écrit alors :* $y(z) = e^{\frac{\beta}{z}} z^{1-\frac{p}{2\beta}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l$ *dont les coefficients du développement suivent une récurrence à trois termes :*

$$\beta = \frac{p}{2} \to y(z) = e^{\frac{\beta}{z}} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \qquad c_1 = \frac{\lambda + \frac{p}{2}}{p} \qquad c_n = \frac{(2-n-\alpha) c_{n-2} + \left((n-1)(n-2) + \lambda + \frac{p}{2}\right) c_{n-1}}{p\, n}$$

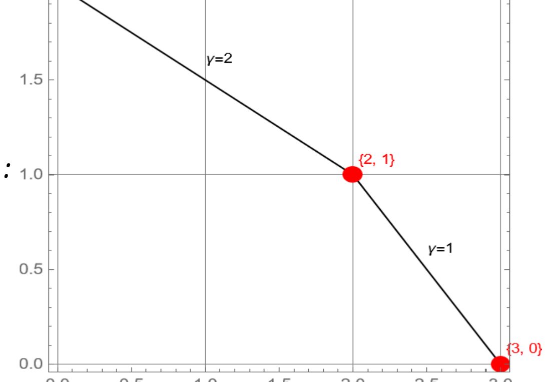
$$\beta = -\frac{p}{2} \to y(z) = e^{\frac{\beta}{z}} z^2 \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^l \qquad c_0 = 1 \qquad c_1 = \frac{2 + \lambda - \frac{p}{2}}{p} \qquad c_n = -\frac{-(n+\alpha) c_{n-2} + \left(n(n+1) + \lambda - \frac{p}{2}\right) c_{n-1}}{p\, n}$$

Il n'y a pas de convergence de ces développements pour les valeurs de z réelles.

Pour ce qui est de la solution en forme normale autour de z=∞. Si l'on transforme l'équation par le $z^2 y''(z) - z^2 y'(z) + \left(\lambda - \alpha z - \frac{p}{z} - \frac{p^2}{4z^2}\right) y(z) = 0$ *changement de variable z->1/z, le point singulier irrégulier est maintenant z=0 et il vient l'équation :*

$$p_0(z) = 1 \qquad p_1(z) = \frac{1+2z}{z} \qquad p_2(z) = \frac{-4\alpha + z\,(4\lambda - p\,z\,(4 + p\,z))}{4z^3}$$
$$p_0(z) y''(z) + p_1(z) y'(z) + p_2(z)\, y(z) = 0$$

Traçons le diagramme de Puisieux :



La valeur γ=1 correspond au développement de Fröbenius dont la forme suit une récurrence à quatre termes :

$$y(z) = z^{-\alpha} \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \quad c_0 = 1 \quad c_1 = -(\lambda + \alpha(1+\alpha)) \quad c_2 = -\frac{-p + (\lambda + (1+\alpha)(2+\alpha)) c_1}{2} \quad c_n = -\frac{-\frac{p^2}{4} c_{n-3} - p\, c_{n-2} + ((n+\alpha)(n-1+\alpha) + \lambda) c_{n-1}}{n}$$

Il n'y a pas de convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

La valeur γ=2 correspond à une forme normale (Thomé) $y(z) = e^{\Omega(z)} z^{\rho} u(z)$ *de terme exponentiel* $\Omega(z) = \frac{\beta}{z} \Rightarrow \Omega'(z) = -\frac{\beta}{z^2}$*. Pour déterminer β il convient d'annuler le premier terme de puissance maximale en 1/z dans* $p_0(z)(\Omega'(z))^2 + p_1(z)\Omega'(z) + p_2(z)$*. Il vient :* $\beta = 0 \quad ou \quad \beta = 1$*.*

La première valeur β=0 correspond au développement de Fröbenius déjà évoqué. La deuxième valeur β=1 permet de substituer dans l'équation différentielle une fonction de la forme : $y(z)=e^{\frac{1}{z}}g(z)$*, il vient alors l'équation différentielle suivante :*

$$p_0(z)=1 \qquad p_1(z)=\frac{2z-1}{z^2} \qquad p_2(z)=-\frac{4\alpha-4z\lambda+4p\,z^2+p^2z^3}{4z^3}$$
$$p_0(z)y''(z)+p_1(z)y'(z)+p_2(z)\,y(z)=0$$

z=0 est toujours un point singulier irrégulier et l'équation indicielle donne l'exposant caractéristique : $\rho=-\alpha$*. La solution en forme normale (en revenant à z->1/z) s'écrit alors comme suit :* $y(z)=e^z z^\alpha \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l}$ *dont les coefficients du développement suivent une récurrence à quatre termes :*

$$y(z)=e^z z^\alpha \sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l z^{-l} \quad c_0=1 \quad c_1=\lambda-\alpha(1-\alpha) \quad c_2=-\frac{p-(\lambda+(1-\alpha)(2-\alpha))c_1}{2} \qquad c_n=-\frac{\frac{p^2}{4}c_{n-3}+p\,c_{n-2}-((n-\alpha)(n-1-\alpha)+\lambda)c_{n-1}}{n}$$

Il n'y a pas de convergence de ce développement pour les valeurs de z réelles.

<u>Famille des équations de Heun équivalence avec les équations dîtes de Heine et Wangerin</u>

<u>Équation de Heun :</u> $y''(z)+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$.

$$contrainte \quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon \Rightarrow y(z)=HeunG(a,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$$

<u>Équation dîtes de Wangerin :</u>

$$y''(z)+\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{z-b\,a}{4z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{\frac{1}{4}z-\frac{b\,a}{4}}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\gamma=1 \qquad \delta=\frac{1}{2} \qquad \varepsilon=\frac{1}{2} \qquad \alpha=\beta=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{b\,a}{4}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta+1=2=\gamma+\delta+\varepsilon\Rightarrow y(z)=HeunG\left(a,\frac{b\,a}{4};\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2};z\right)$$

<u>Équation dîtes de Heine :</u>

$$y''(z)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{2z-b\,a}{4z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\Leftrightarrow y''(z)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z-a}\right\}y'(z)+\frac{\frac{1}{2}z-\frac{b\,a}{4}}{z(z-1)(z-a)}y(z)=0$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2} \quad \beta=1\Rightarrow\gamma=\frac{1}{2} \qquad \delta=1 \qquad \varepsilon=1 \qquad \alpha=\frac{1}{2} \qquad \beta=1 \qquad q=\frac{b\,a}{4}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta+1=\frac{5}{2}=\gamma+\delta+\varepsilon\Rightarrow y(z)=HeunG\left(a,\frac{b\,a}{4};\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1;z\right)$$

Appendice n°1 : deux propriétés des récurrences à trois termes : $A_k d_{k-1} + B_k\ d_k + C_k d_{k+1} = 0$

Formons les deux fractions continues autour de l'indice k=k_0 :

$$\text{Notons}\quad f_k^{(-)} = \frac{d_k}{d_{k\text{-}1}} \quad f_k^{(+)} = \frac{d_k}{d_{k+1}} \Rightarrow k > k_0 \qquad \frac{d_k}{d_{k_0}} = \prod_{l=k_0+1}^{l=k} f_l^{(-)} \qquad k < k_0 \qquad \frac{d_k}{d_{k_0}} = \prod_{l=k}^{l=k_0-1} f_l^{(+)}$$

$$\begin{cases} k > k_0 & \dfrac{d_k}{d_{k\text{-}1}} = -\dfrac{A_k}{B_k + C_k \dfrac{d_{k+1}}{d_k}} \Leftrightarrow f_k^{(-)} = -\dfrac{A_k}{B_k + C_k f_{k+1}^{(-)}} e \\ k < k_0 & \dfrac{d_k}{d_{k+1}} = -\dfrac{C_k}{B_k + A_k \dfrac{d_{k\text{-}1}}{d_k}} \Leftrightarrow f_k^{(+)} = -\dfrac{C_k}{B_k + A_k f_{k-1}^{(+)}} \end{cases}$$

Propriété n°1 : lorsque C_k s'annule à l'indice k_0-1 alors les coefficients du développement s'annulent d_k=0, pour les indices k < k_0.

Démonstration de la propriété n°1 : supposons que $d_{k_0-1} = 0$*, alors*

$$k = k_0 - 1 \Rightarrow A_{k_0-1} d_{k_0-2} + B_{k_0-1}\ d_{k_0-1} + C_{k_0-1} d_{k_0} = 0 = A_{k_0-1} d_{k_0-2} + B_{k_0-1}\ d_{k_0-1}$$
$$Si \quad d_{k_0-1} = 0 \Rightarrow d_{k_0-2} = 0 \Rightarrow d_k = 0 \quad k < k_0$$

Comme on suppose pour la récurrence que le coefficient $d_{k_0} \neq 0$ *est non nul, alors la fraction continue* $f_{k_0-1}^{(+)}$ *est nécessairement nulle, même si la valeur* $f_{k_0-2}^{(+)}$ *pourrait tendre vers l'infini alors :*

$$f_{k_0-1}^{(+)} = -\frac{C_{k_0-1}}{B_{k_0-1} + A_{k_0-1} f_{k_0-2}^{(+)}} = 0 = \frac{d_{k_0-1}}{d_{k_0}} \Rightarrow d_{k_0-1} = 0$$

La propriété n°1 est démontrée.

Propriétés n°2 : lorsque A_k s'annule lorsque k=k_0+1, les coefficients d_k=0 s'annulent lorsque k>k_0.

Démonstration de la propriété n°2 : supposons que $d_{k_0+1} = 0$*, alors*

$$k = k_0 + 1 \Rightarrow A_{k_0+1} d_{k_0} + B_{k_0+1}\ d_{k_0+1} + C_{k_0+1} d_{k_0+2} = 0 = C_{k_0+1} d_{k_0+2} \Rightarrow d_{k_0+2} = 0 \Rightarrow d_k = 0 \quad k > k_0$$

A l'inverse, comme on suppose pour la récurrence que le coefficient $d_{k_0} \neq 0$ *est non nul, alors la fraction continue* $f_{k_0+1}^{(-)}$ *est nécessairement nulle, même si la valeur* $f_{k_0+2}^{(-)}$ *pourrait tendre vers l'infini alors :* $f_{k_0+1}^{(-)} = -\dfrac{A_{k_0+1}}{B_{k_0+1} + C_{k_0+1} f_{k_0+2}^{(-)}} = \dfrac{d_{k_0+1}}{d_{k_0}} \Rightarrow d_{k_0+1} = 0$*, et il s'en suit que* $d_{k_0+2} = 0$ *en appliquant la récurrence à trois termes.*

La propriété n°2 est démontrée.

L'exemple du développement en série de fonctions de Laguerre des fonctions d'ondes sphéroïdales aplaties dans le cas où γ présente de grandes valeurs :

$$y(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\mu)}\left(2\gamma(1-x)\right) + (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\mu)}\left(2\gamma(1+x)\right)\right)$$

Illustre bien l'une de ces propriétés. Les coefficients respectent une récurrence à trois termes de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_k = (l + k + \mu)(l + k) \\ \beta_k = -2\left(2(l + k) + \mu + 1\right) \\ \chi_k = 2(l + k + \mu + 1)(l + k) + 1 + \mu \end{cases} \qquad \alpha_k d_{k-1} - (\lambda + \beta_k \gamma + \chi_k) d_k + \alpha_{k+1} d_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow A_k = \alpha_k \qquad C_k = \alpha_{k+1}$$

L'annulation des termes A_k , C_k *se produit lorsque :*

$$C_{k_0-1} = \alpha_{k_0} = 0 = (l + k_0 + \mu)(l + k_0) \Leftrightarrow k_0 = -l$$
$$A_{k_0+1} = \alpha_{k_0+2} = (l + k_0 + \mu + 2)(l + k_0 + 2) \Leftrightarrow k_0 = -l - 2$$

De ces deux conditions c'est la condition $C_{k_0-1} = 0 = (l + k_0 + \mu)(l + k_0) \Leftrightarrow k_0 = -l$ *qui prime de toute évidence et l'on peut en déduire que la sommation bilatérale devient unilatérale.*

$$y(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=-l}^{k=+\infty} d_k \left(e^{-\gamma(1-x)} L_{l+k}^{(\mu)}\left(2\gamma(1-x)\right) + (-1)^{(\nu-\mu)} e^{-\gamma(1+x)} L_{l+k}^{(\mu)}\left(2\gamma(1+x)\right)\right)$$

Appendice n°2 : deux propriétés des récurrences à quatre termes : $A_k\ d_{k-2}+B_k\ d_{k-1}+C_k\ d_k+D_k\ d_{k+1}=0$

Propriété n°1 *: Lorsque* $D_{k_0}=D_{k_0-1}=C_{k_0}=0$ *alors les coefficients du développement* d_k *s'annulent pour les indices* $k<k_0$.

Démonstration de la propriété n°1, supposons que $d_{k_0-1}=0 \quad et \quad d_{k_0-2}=0$, *alors :*

$$\begin{array}{l}
A_k\ d_{k-2}+B_k\ d_{k-1}+C_k\ d_k+D_k\ d_{k+1}=0 \\
k=k_0-1 \Rightarrow A_{k_0-1}d_{k_0-3}+B_{k_0-1}\ d_{k_0-2}+C_{k_0-1}d_{k_0-1}+D_{k_0-1}d_{k_0}=0=A_{k_0-1}d_{k_0-3}+B_{k_0-1}\ d_{k_0-2} \\
Si \quad d_{k_0-1} \quad et \quad d_{k_0-2}=0 \Rightarrow d_{k_0-3}=0 \quad or \quad pour\ que \quad d_k=0 \quad k<k_0 \quad il\ suffit\ que \quad d_{k_0-3}=0 \\
car \quad d_{k_0-1}=d_{k_0-2}=d_{k_0-3}=0 \Rightarrow d_{k_0-4}=0
\end{array}$$

Démontrons maintenant que $d_{k_0-1}=0 \quad et \quad d_{k_0-2}=0$ *, en introduisant la fraction suivante, on peut établir les identités :*

$$f_k=\frac{d_k}{d_{k+1}} \Rightarrow A_k\ f_{k-2}+B_k+\frac{C_k}{f_{k-1}}+\frac{D_k}{f_kf_{k-1}}=0 \Rightarrow \left(A_k\ f_{k-2}+B_k\right)f_{k-1}+C_k=-\frac{D_k}{f_k} \Rightarrow f_k=-\frac{D_k}{\left(A_k\ f_{k-2}+B_k\right)f_{k-1}+C_k} \Rightarrow f_{k-1}=-\frac{C_k+\frac{D_k}{f_k}}{A_k\ f_{k-2}+B_k}$$

De plus $f_kf_{k-1}=-\frac{f_kC_k+D_k}{A_k\ f_{k-2}+B_k}$ *. Il vient pour k=k₀ :* $f_{k_0-1}=-\frac{C_{k_0}+\frac{D_{k_0}}{f_{k_0}}}{A_k\ f_{k_0-2}+B_{k_0}}=0 \leftarrow f_{k_0}\neq 0 \qquad f_{k_0-2} \quad forme\ indéterminée$ *et cela même si la valeurs* f_{k_0-2} *pourrait être une forme indéterminée qui une fois déterminée tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie. En conséquence :* $d_{k_0-1}=0$ *. Pour déterminer l'autre valeur en* k_0*-2 en utilisant l'identité précédente pour la valeur* $k=k_0-2$ *:* $f_{k_0-2}f_{k_0-1}=-\frac{f_{k_0-1}C_{k_0-1}+D_{k_0-1}}{A_{k_0-1}\ f_{k_0-3}+B_{k_0-1}}=0=\frac{d_{k_0-2}}{d_{k_0}} \Rightarrow d_{k_0-2}=0$ *, toujours pour les mêmes raisons que* f_{k_0-3} *pourraient être une forme indéterminée qui une fois déterminée tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie la valeur de* d_{k_0-2} *s'annule.*

La propriété n°1 est donc démontrée.

Propriétés n°2 *: Lorsque* $A_{k_0+1} = A_{k_0+2} = B_{k_0+1} = 0$ *, alors les coefficients* $d_k=0$ *s'annulent lorsque* $k>k_0$*.*

Démonstration de la propriété n°2 : supposons que $d_{k_0+1} = 0 \quad et \quad d_{k_0+2} = 0$*, alors :*

$$
\begin{array}{l}
A_k\ d_{k-2} + B_k\ d_{k-1} + C_k\ d_k + D_k\ d_{k+1} = 0 \\
k = k_0 + 2 \Rightarrow A_{k_0+2} d_{k_0} + B_{k_0+2}\ d_{k_0+1} + C_{k_0+2} d_{k_0+2} + D_{k_0+2} d_{k_0+3} = 0 = B_{k_0+2}\ d_{k_0+1} + C_{k_0+2} d_{k_0+2} + D_{k_0+2} d_{k_0+3} \\
Si \quad d_{k_0+1} \quad et \quad d_{k_0+2} = 0 \Rightarrow d_{k_0+3} = 0 \quad or \quad pour\ que \quad d_k = 0 \quad k > k_0 \quad il\ suffit\ que \quad d_{k_0+3} = 0 \\
car \quad d_{k_0+1} = d_{k_0+2} = d_{k_0+3} = 0 \Rightarrow d_{k_0+4} = 0
\end{array}
$$

Démontrons maintenant que $d_{k_0+1} = 0 \quad et \quad d_{k_0+2} = 0$ *, en introduisant la fraction suivante, on peut établir l'identité :* $f_k = \frac{d_k}{d_{k-1}} \Rightarrow A_k \frac{d_{k-2}}{d_{k-1}} + B_k + C_k \frac{d_k}{d_{k-1}} + D_k \frac{d_{k+1}}{d_{k-1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{A_k}{f_{k-1}} + B_k + C_k\ f_k + D_k\ f_k f_{k+1} \Rightarrow f_k = -\frac{\frac{A_k}{f_{k-1}} + B_k}{C_k + f_{k+1} D_k}$

Il vient pour $k=k_0+1$ *:* $f_{k_0+1} = -\frac{\frac{A_{k_0+1}}{f_{k_0}} + B_{k_0+1}}{C_{k_0+1} + f_{k_0+2} D_{k_0+1}} = 0 \leftarrow f_{k_0} \neq 0 \qquad f_{k_0+2} \quad forme\ indéterminée$ *et cela même si la valeur de* f_{k_0+2} *pourrait être une forme indéterminée qui une fois déterminée tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie. En conséquence :* $d_{k_0+1} = 0$ *. Pour déterminer l'autre valeur en* k_0+2 *l'identité précédente peut aussi s'écrire sous la forme :* $f_k f_{k-1} = -\frac{A_k + B_k f_{k-1}}{C_k + f_{k+1} D_k}$ *, soit pour la valeur* $k=k_0+2$ *:* $f_{k_0+2} f_{k_0+1} = -\frac{A_{k_0+2} + B_{k_0+2} f_{k_0+1}}{C_{k_0+2} + f_{k_0+3} D_{k_0+2}} = -\frac{A_{k_0+2}}{C_{k_0+2} + f_{k_0+3} D_{k_0+2}} = \frac{d_{k_0+2}}{d_{k_0}}$ *toujours pour les mêmes raisons que* f_{k_0+3} *pourrait être une forme indéterminée qui une fois déterminée tendraient vers l'infini, zéro ou une valeur finie dès lors la valeur de* d_{k_0+2} *s'annule.*

La propriété n°2 est donc démontrée.

Appendice n°3 : deux propriétés des récurrences à cinq termes : $A_k\ d_{k-2}+B_k\ d_{k-1}+C_k\ d_k+D_k\ d_{k+1}+E_k\ d_{k+2}=0$

Propriété n°1 : Lorsque D_k et E_k s'annulent simultanément à l'indice k_0-1 et E_k s'annule à l'indice k_0-2 alors les coefficients du développement s'annulent d_k=0, pour les indices k < k_0.

Démonstration de la propriété n°1 : supposons que $d_{k_0-1}=0 \quad et \quad d_{k_0-2}=0$*, alors*

$$A_k\ d_{k-2}+B_k\ d_{k-1}+C_k\ d_k+D_k\ d_{k+1}+E_k\ d_{k+2}=0$$
$$k=k_0-1 \Rightarrow A_{k_0-1}d_{k_0-3}+B_{k_0-1}\ d_{k_0-2}+C_{k_0-1}d_{k_0-1}+D_{k_0-1}d_{k_0}+E_{k_0-1}d_{k_0+1}=0=A_{k_0-1}d_{k_0-3}+B_{k_0-1}\ d_{k_0-2}+C_{k_0-1}d_{k_0-1}$$
$$Si \quad d_{k_0-1}=0 \quad et \quad d_{k_0-2}=0 \Rightarrow d_{k_0-3}=0$$
$$Pour\ que \quad d_k=0 \quad k<k_0 \quad il\ suffit\ que \quad d_{k_0-4}=0$$
$$k=k_0-2 \Rightarrow A_{k_0-2}d_{k_0-4}+B_{k_0-2}\ d_{k_0-3}+C_{k_0-2}d_{k_0-2}+D_{k_0-2}d_{k_0-1}+E_{k_0-2}d_{k_0}=0=A_{k_0-2}d_{k_0-4}+E_{k_0-2}d_{k_0}$$
$$Comme \quad E_{k_0-2}=0 \Rightarrow d_{k_0-4}=0 \Rightarrow d_k=0 \quad k<k_0$$

En introduisant la fraction suivante, on peut établir l'identité :

$$f_k=\frac{d_k}{d_{k+1}} \Rightarrow f_k=-\frac{D_k+\dfrac{E_k}{f_{k+1}}}{A_k\ f_{k-2}f_{k-1}+B_k\ f_{k-1}+C_k}$$

Il vient pour k=k_0-1 :
$$f_{k_0-1}=-\frac{D_{k_0-1}+\dfrac{E_{k_0-1}}{f_{k_0}}}{A_{k_0-1}\ f_{k_0-3}f_{k_0-2}+B_{k_0-1}\ f_{k_0-2}+C_{k_0-1}}=0 \leftarrow f_{k_0}\neq 0 \qquad f_{k_0-2} \quad ou \quad f_{k_0-3} \quad forme\ indéterminée$$

et cela même si les valeurs f_{k_0-2} *et* f_{k_0-3} *pourraient être des formes indéterminées qui une fois déterminées tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie. En conséquence :* $d_{k_0-1}=0$.

Pour déterminer l'autre valeur en k_0-2 l'identité précédente peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f_k f_{k+1}=-\frac{D_k f_{k+1}+E_k}{C_k+f_{k-1}\left(A_k\ f_{k-2}+B_k\right)}$$

Soit pour la valeur k=k_0-2 : $f_{k_0-2}f_{k_0-1}=-\dfrac{D_{k_0-2}f_{k_0-1}+E_{k_0-2}}{C_{k_0-2}+f_{k_0-3}\left(A_{k_0-2}\ f_{k_0-4}+B_{k_0-2}\right)}=-\dfrac{E_{k_0-2}}{C_{k_0-2}+f_{k_0-3}\left(A_{k_0-2}\ f_{k_0-4}+B_{k_0-2}\right)}=\dfrac{d_{k_0-2}}{d_{k_0}}$

Toujours pour les mêmes raisons que f_{k_0-3} *et* f_{k_0-4} *pourraient être des formes indéterminées qui une fois déterminée tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie la valeur de* d_{k_0-2} *s'annule.*

La propriété n°1 est donc démontrée.

Propriétés n°2 : Lorsque A_k et B_k s'annulent simultanément lorsque $k=k_0+1$, et que A_k s'annule lorsque $k=k_0+2$, alors les coefficients $d_k=0$ s'annulent lorsque $k>k_0$.

Démonstration de la propriété n°2 : supposons que $d_{k_0+1}=0 \quad et \quad d_{k_0+2}=0$*, alors*

$$A_k\ d_{k-2}+B_k\ d_{k-1}+C_k\ d_k+D_k\ d_{k+1}+E_k\ d_{k+2}=0$$
$$k=k_0+1 \Rightarrow A_{k_0+1}d_{k_0-1}+B_{k_0+1}\ d_{k_0}+C_{k_0+1}d_{k_0+1}+D_{k_0+1}d_{k_0+2}+E_{k_0+1}d_{k_0+3}=0=C_{k_0+1}d_{k_0+1}+D_{k_0+1}d_{k_0+2}+E_{k_0+1}d_{k_0+3}$$
$$Si \quad d_{k_0+1}=0 \quad et \quad d_{k_0+2}=0 \Rightarrow d_{k_0+3}=0$$
$$Pour\ que \quad d_k=0 \quad k>k_0 \quad il\ suffit\ que \quad d_{k_0+4}=0$$
$$k=k_0+2 \Rightarrow A_{k_0+2}d_{k_0}+B_{k_0+2}\ d_{k_0+1}+C_{k_0+2}d_{k_0+2}+D_{k_0+2}d_{k_0+3}+E_{k_0+2}d_{k_0+4}=0=A_{k_0+2}d_{k_0}+E_{k_0+2}d_{k_0+4}$$
$$Comme \quad A_{k_0+2}=0 \Rightarrow d_{k_0+4}=0 \Rightarrow d_k=0 \quad k>k_0$$

En introduisant la fraction suivante, on peut établir l'identité :

$$f_k=\frac{d_k}{d_{k-1}} \Rightarrow A_k\ \frac{d_{k-2}}{d_{k-1}}+B_k+C_k\ \frac{d_k}{d_{k-1}}+D_k\ \frac{d_{k+1}}{d_{k-1}}+E_k\ \frac{d_{k+2}}{d_{k-1}}=0 \Leftrightarrow \frac{A_k}{f_{k-1}}+B_k+C_k\ f_k+D_k\ f_kf_{k+1}+E_k\ f_kf_{k+1}f_{k+2} \Rightarrow f_k=-\frac{\frac{A_k}{f_{k-1}}+B_k}{C_k+f_{k+1}\left(D_k+E_k\ f_{k+2}\right)}$$

Il vient pour $k=k_0+1$: $$f_{k_0+1}=-\frac{\frac{A_{k_0+1}}{f_{k_0}}+B_{k_0+1}}{C_{k_0+1}+f_{k_0+2}\left(D_{k_0+1}+E_{k_0+1}\ f_{k_0+3}\right)}=0 \leftarrow f_{k_0}\neq 0 \qquad f_{k_0+2} \quad ou \quad f_{k_0+3} \quad forme\ indéterminée$$

et cela même si les valeurs $f_{k_0+2} \quad et \quad f_{k_0+3}$ pourraient être des formes indéterminées qui une fois déterminée tendrait vers l'infini, zéro ou une valeur finie. En conséquence : $d_{k_0+1}=0$.

Pour déterminer l'autre valeur en k_0+2 l'identité précédente peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f_kf_{k-1}=-\frac{A_k+B_kf_{k-1}}{C_k+f_{k+1}\left(D_k+E_k\ f_{k+2}\right)}$$

Soit pour la valeur $k=k_0+2$: $$f_{k_0+2}f_{k_0+1}=-\frac{A_{k_0+2}+B_{k_0+2}f_{k_0+1}}{C_{k_0+2}+f_{k_0+3}\left(D_{k_0+2}+E_{k_0+2}\ f_{k_0+4}\right)}=-\frac{A_{k_0+2}}{C_{k_0+2}+f_{k_0+3}\left(D_{k_0+2}+E_{k_0+2}\ f_{k_0+4}\right)}=\frac{d_{k_0+2}}{d_{k_0}}$$

Toujours pour les mêmes raisons que $f_{k_0+3} \quad et \quad f_{k_0+4}$ pourraient être des formes indéterminées qui une fois déterminées tendraient vers l'infini, zéro ou une valeur finie dès lors la valeur de d_{k_0+2} s'annule.

La propriété n°2 est donc démontrée.

<u>Appendice n°4 : A propos de l'équation différentielle fuchsienne à 5 points réguliers</u>

Ce petit appendice est inspiré de l'article daté de 2019 des auteurs A.M.Ishkhanyan, C.Cesarano « Generalized-Hypergeometric Solutions of the General Fuchsian Linear ODE Having five regularities».

Soit l'équation différentielle fuchsienne comportant 5 point réguliers (4 à distance finie et le point à l'infini) dont la forme la plus générale est la suivante :

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}+\dfrac{\zeta}{z-b}\right)y'(z)+\dfrac{\left(\alpha\ \beta\ z^2-\theta_1 z-\theta_0\right)}{z(z-1)(z-a)(z-b)}\,y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta \end{cases}$$

Cette équation différentielle se réduit naturellement à l'équation de Heun lorsqu'il existe des contraintes qui lient les paramètres, selon plusieurs modalités :

$$\begin{cases} \zeta=0\quad \theta_1=b\alpha\ \beta-\dfrac{\theta_0}{b}\Rightarrow y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}\right)y'(z)+\dfrac{\alpha\ \beta\ z+\dfrac{\theta_0}{b}}{z(z-1)(z-a)}\,y(z)=0 \\ \varepsilon=0\quad \theta_1=a\alpha\ \beta-\dfrac{\theta_0}{a}\Rightarrow y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\zeta}{z-b}\right)y'(z)+\dfrac{\alpha\ \beta\ z+\dfrac{\theta_0}{a}}{z(z-1)(z-b)}\,y(z)=0 \\ \delta=0\quad \theta_1=\alpha\ \beta-\theta_0\quad z=a\,\tilde{z}\Rightarrow y''(\tilde{z})+\left(\dfrac{\gamma}{\tilde{z}}+\dfrac{\varepsilon}{\tilde{z}-1}+\dfrac{\zeta}{\tilde{z}-\dfrac{b}{a}}\right)y'(\tilde{z})+\dfrac{\alpha\ \beta\ \tilde{z}+\dfrac{\theta_0}{a}}{\tilde{z}(\tilde{z}-1)\left(\tilde{z}-\dfrac{b}{a}\right)}\,y(\tilde{z})=0 \end{cases}$$

*Cela permet de lier obligatoirement les deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1 dans le cas où le produit des paramètres ε*ζ=0. De telles relations générales se produisent également lorsque les produits suivants δ*ζ=0 ou δ*ε=0, ce que l'on peut résumer par les trois cas suivants :*

$$\begin{cases} \delta=0\rightarrow\theta_1=\alpha\ \beta-\theta_0 \\ \varepsilon=0\rightarrow\theta_1=a\alpha\ \beta-\dfrac{\theta_0}{a} \\ \zeta=0\rightarrow\theta_1=b\alpha\ \beta-\dfrac{\theta_0}{b} \end{cases}$$

Les conditions pour passer à l'équation à trois point réguliers, soit l'équation différentielle hypergéométrique sont encore plus drastiques, deux des paramètres doivent être nuls simultanément ce qui conduit à la fixation complète des deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1 :

$$\begin{cases} \varepsilon=\zeta=0\quad \theta_0=-a\,b\alpha\ \beta\quad \theta_1=(a+b)\alpha\ \beta\Rightarrow y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}\right)y'(z)+\dfrac{\alpha\ \beta}{z(z-1)}\,y(z)=0 \\ \delta=\varepsilon=0\quad \theta_0=-a\ \alpha\ \beta\quad \theta_1=(a+1)\alpha\ \beta\quad z=b\,\tilde{z}\Rightarrow y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{\tilde{z}}+\dfrac{\zeta}{\tilde{z}-1}\right)y'(z)+\dfrac{\alpha\ \beta}{\tilde{z}(\tilde{z}-1)}\,y(z)=0 \\ \delta=\zeta=0\quad \theta_0=-b\ \alpha\ \beta\quad \theta_1=(b+1)\alpha\ \beta\quad z=a\,\tilde{z}\Rightarrow y''(\tilde{z})+\left(\dfrac{\gamma}{\tilde{z}}+\dfrac{\varepsilon}{\tilde{z}-1}\right)y'(\tilde{z})+\dfrac{\alpha\ \beta}{\tilde{z}(\tilde{z}-1)}\,y(\tilde{z})=0 \end{cases}$$

<u>S'agissant des développements de Fröbenius aux voisinages des points réguliers à distance finie</u>

Les exposants λ et les développements de Fröbenius pour cette équation différentielle ne comportant que des points réguliers sont :

$$\text{Exposant } \lambda \qquad z=0 \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1-\gamma \end{cases} \quad z=1 \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1-\delta \end{cases} \quad z=a \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1-\varepsilon \end{cases} \quad z=b \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1-\zeta \end{cases} \quad z=\infty \to \begin{cases} \lambda = \alpha \\ \lambda = \beta \end{cases}$$

Développement de Fröbenius

$$z=0 \to \begin{cases} y_1(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j z^j \\ y_2(z) = z^{1-\gamma} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j z^j \end{cases} \qquad z=1 \to \begin{cases} y_1(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (1-z)^j \\ y_2(z) = (1-z)^{1-\delta} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j (1-z)^j \end{cases}$$

$$z=a \to \begin{cases} y_1(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j \left(\frac{a-z}{a-1}\right)^j \\ y_2(z) = \left(\frac{a-z}{a-1}\right)^{1-\varepsilon} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j \left(\frac{a-z}{a-1}\right)^j \end{cases} \quad z=b \to \begin{cases} y_1(z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j \left(\frac{b-z}{b-1}\right)^j \\ y_2(z) = \left(\frac{b-z}{b-1}\right)^{1-\zeta} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j \left(\frac{b-z}{b-1}\right)^j \end{cases} \quad z=\infty \to \begin{cases} y_1(z) = z^{-\alpha} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{c_j}{z^j} \\ y_2(z) = z^{-\beta} \times \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{c_j}{z^j} \end{cases}$$

Examinons rapidement la récurrence des coefficients des développements de Fröbenius, uniquement pour le premier exposant λ sur les seuls points réguliers à distance finie soit 0,1,a et b.

Nous avons une récurrence à 4 termes autour du point z=0, de la forme :

$$A_{j-3}\, c_{j-3} + B_{j-2}\, c_{j-2} + C_{j-1}\, c_{j-1} + D_j\, c_j = 0 \qquad \begin{cases} A_j = -(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = \vartheta_1 + j\left((j+\alpha+\beta)(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta\right) \\ C_j = \vartheta_0 - j\left((\gamma+j-1)(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta\right) \\ D_j = j\,a\,b\,(\gamma+j-1) \end{cases}$$

Nous avons une récurrence à 4 termes autour du point z=1 de la forme :

$$A_{j-3}\, c_{j-3} + B_{j-2}\, c_{j-2} + C_{j-1}\, c_{j-1} + D_j\, c_j = 0 \qquad \begin{cases} A_j = -(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = -j^2(a+b-3) + j\left(a\,\varepsilon + b\,\zeta + \delta - 1 - (a+b-2)(\alpha+\beta)\right) + 2\,\alpha\,\beta - \vartheta_1 \\ C_j = j^2\left(2(a+b) - ab - 3\right) + j\left(2 - \alpha - \beta - 2\delta + a\left(\alpha+\beta-1+\delta-\varepsilon-b(\gamma+\delta-1)\right)\right) - \alpha\,\beta + \vartheta_0 + \vartheta_1 \\ D_j = j\,(a-1)(b-1)(\delta+j-1) \end{cases}$$

Nous avons une récurrence à 4 termes autour du point z=a de la forme :

$$A_{j-3}\, c_{j-3} + B_{j-2}\, c_{j-2} + C_{j-1}\, c_{j-1} + D_j\, c_j = 0 \qquad \begin{cases} A_j = (a-1)^2(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = (a-1)\left(j^2(b+1-3a) + j\left(\alpha+\beta-\delta-a(2(\alpha+\beta)+\varepsilon-1)+b(\alpha+\beta-\zeta)\right) - 2\,a\,\alpha\,\beta + \vartheta_1\right) \\ C_j = j^2\left(3a^2+b-2a-2ab\right) + j\left(b\,(\gamma+\varepsilon-1) + a^2(\alpha+\beta+2\varepsilon-2) - a\left(\alpha+\beta-\delta+\varepsilon-1+b\,(\gamma+\delta+2\varepsilon-2)\right)\right) + a^2\alpha\,\beta - \vartheta_0 - a\vartheta_1 \\ D_j = a\,(b-a)\,j\,(\varepsilon+j-1) \end{cases}$$

Nous avons une récurrence à 4 termes autour du point z=b de la forme :

$$A_{j-3}\, c_{j-3} + B_{j-2}\, c_{j-2} + C_{j-1}\, c_{j-1} + D_j\, c_j = 0 \qquad \begin{cases} A_j = (b-1)^2(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = (b-1)\left(j^2(a+1-3b) + j\left(\alpha+\beta-\delta-b(2(\alpha+\beta)+\zeta-1)+a(\alpha+\beta-\varepsilon)\right) - 2\,b\,\alpha\,\beta + \vartheta_1\right) \\ C_j = j^2\left(3b^2+a-2b-2ab\right) + j\left(a\,(\gamma+\zeta-1) + b^2(\alpha+\beta+2\zeta-2) - b\left(\alpha+\beta-\delta+\zeta-1+a\,(\gamma+\delta+2\zeta-2)\right)\right) + b^2\alpha\,\beta - \vartheta_0 - b\vartheta_1 \\ D_j = b\,(a-b)\,j\,(\zeta+j-1) \end{cases}$$

Cette récurrence peut être directement obtenue par les deux substitutions : a<->b, ε<->ζ.

Solutions hypergéométriques générales de l'équation fuschienne à 5 singularités

La fonction hypergéométrique générale est une fonction dont les coefficients du développement en série suivent une récurrence à deux termes :

$$y(z) = {}_rF_s(\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\};\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_s\};z) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} c_j z^j \quad avec \quad h_0=1 \quad c_0=1 \quad c_j = h_j c_{j-1} \quad j>0 \quad h_j = \frac{c_j}{c_{j-1}} = \frac{\sigma}{j}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=r}(\alpha_l-1+l)}{\prod_{l=1}^{l=s}(\beta_l-1+l)}$$

Une solution hypergéométrique générale est proposée sous la forme :

$$y(z) = {}_{N+2}F_{N+1}(\{\alpha,\beta,e_1+1,...,e_N+1\};\{\gamma,e_1,...,e_N\};\sigma\, z) \quad \begin{cases} h_0=1 \quad c_0=1 \quad c_j=h_jc_{j-1} \quad j>0 \\ h_j = \dfrac{c_j}{c_{j-1}} = \dfrac{\sigma}{j}\times\dfrac{(\alpha+j-1)(\beta+j-1)}{(\gamma+j-1)}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)} = -\sigma\, a\, b\times\dfrac{A_{j-1}}{D_j}\times\dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)} \end{cases}$$

$$h_{j-2} = -\sigma\, a\, b\times\frac{A_{j-3}}{D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)} \qquad h_{j-1}h_{j-2} = \sigma^2a^2b^2\times\frac{A_{j-2}A_{j-3}}{D_{j-1}D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)} \qquad h_jh_{j-1}h_{j-2} = -\sigma^3a^3b^3\times\frac{A_{j-1}A_{j-2}A_{j-3}}{D_jD_{j-1}D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)}$$

En revenant à la récurrence à 4 termes autour du point singulier z=0 et en injectant ces diverses expressions dans la récurrence $A_{j-3}c_{j-3}+B_{j-2}c_{j-2}+C_{j-1}c_{j-1}+D_jc_j=0$ *:*

$$\frac{A_{j-3}}{h_{j-2}h_{j-1}}+\frac{B_{j-2}}{h_{j-1}}+C_{j-1}+D_jh_j=0 \Leftrightarrow A_{j-3}+B_{j-2}\,h_{j-2}+C_{j-1}\,h_{j-1}\,h_{j-2}+D_j\,h_j\,h_{j-1}\,h_{j-2}=0$$

$$\Leftrightarrow A_{j-3}-\sigma\, a\, b\times B_{j-2}\,\frac{A_{j-3}}{D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)}+\sigma^2a^2b^2\times C_{j-1}\,\frac{A_{j-2}A_{j-3}}{D_{j-1}\,D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)}-\sigma^3a^3b^3\times D_j\,\frac{A_{j-1}\,A_{j-2}\,A_{j-3}}{D_j\,D_{j-1}\,D_{j-2}}\times\frac{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)}{\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)}=0$$

$$\Leftrightarrow D_{j-1}\,D_{j-2}\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)-\sigma\, a\, b\times B_{j-2}\,D_{j-1}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)+\sigma^2a^2b^2\times C_{j-1}\,A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)-\sigma^3a^3b^3\times A_{j-1}\,A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)=0$$

$$Posons \qquad \sigma_0=-\sigma\, a\, b \Rightarrow \sigma_0^{\,3}A_{j-1}\,A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)+\sigma_0^{\,2}C_{j-1}\,A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)+\sigma_0B_{j-2}\,D_{j-1}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)+D_{j-1}\,D_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)=0 \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{l=N+4}T_l\,j^l=0$$

Il s'agit maintenant d'annuler tous les coefficients de cette équation algébrique polynomiale en j. Le degré maximal de ce polynôme en j est N+4. Dans ces conditions, il y a N+5 équations algébriques $\sum_{l=0}^{l=N+4}T_l\,j^l=0 \Rightarrow T_l=0 \quad l\in\{0,1,...,N+4\}$ *devant s'annuler, pour N+1 inconnus qui sont les coefficients* $e_1, e_2, ... e_N, \sigma$ *de la fonction hypergéométrique générale, ainsi que les 7 paramètres (8 – la contrainte de l'équation Fuchsienne)* $\theta_0,\theta_1,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta \qquad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta$ *. Parmi ces 7 paramètres libres, il s'avère qu'il peuvent être liés par une contrainte supplémentaire pour que la solution hypergéométrique générale existe. Il s'agirait alors de passer un seul de ces derniers comme un inconnu, s'il s'avérait que la valeur de σ devienne déterminée (voir ce qui suit immédiatement).*

D'autre part pour j=1, l'équation algébrique devient la suivante :

$$j=1 \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N+4} T_l = 0 = \sigma_0^{\ 3} A_0\ A_{-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+1) + \sigma_0^{\ 2} C_0\ A_{-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} e_l + \sigma_0 B_{-1}\ D_0 \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l-1) + D_0\ D_{-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l-2)$$

$$\begin{cases} A_j = -(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = \vartheta_1 + j\,((j+\alpha+\beta)(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta) \\ C_j = \vartheta_0 - j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) \\ D_j = j\,a\,b\,(\gamma+j-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = -\alpha\,\beta \\ A_{-1} = -(\alpha-1)(\beta-1) \\ C_0 = \vartheta_0 \\ D_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{l=N+4} T_l = 0 = \sigma_0^{\ 3} A_0\ A_{-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+1) + \sigma_0^{\ 2} C_0\ A_{-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} e_l = A_{-1}\sigma_0^{\ 2} \times \left(-\alpha\,\beta\,\sigma_0 \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+1) + \vartheta_0 \times \prod_{l=1}^{l=N} e_l \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta_0 \times \prod_{l=1}^{l=N} e_l - \alpha\,\beta\,\sigma_0 \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+1) = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = \alpha\,\beta\,\sigma_0 \times \frac{\prod_{l=1}^{l=N} (e_l+1)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l}$$

Dans ces conditions la somme de tous les coefficients de l'équation algébrique introduit de facto un contrainte sur la valeur de ϑ_0 soit encore entre $e_1, e_2, \ldots e_N$ et σ . Nous utiliserons ce résultat par la suite. Par choix nous fixons donc $e_1, e_2, \ldots e_N, \vartheta_1$ comme inconnus à déterminer en fonction des 6 paramètres $\theta_0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \quad \alpha+\beta+1 = \gamma+\delta+\varepsilon+\zeta$ *jugé libres.*

Il convient donc d'établir des contraintes entre ces divers paramètres pour obtenir in fine un système de N+1 équations algébriques à N+1 inconnus ($e_1, e_2, \ldots e_N, \vartheta_1$) et dans l'idéal que le système d'équations algébriques puisse être partiellement « linéarisé ».

<u>Réduction du nombre d'équations algébriques à N+1 et fixation des inconnus</u>

En simulant à l'aide de Mathematica cette formulation théorique il s'avère que le terme d'ordre N+4 est égal à :

$$\sigma_0^{\ 3} A_{j-1} A_{j-2} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+j) + \sigma_0^{\ 2} C_{j-1} A_{j-2} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+j-1) + \sigma_0 B_{j-2} D_{j-1} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+j-2) + D_{j-1} D_{j-2} \times \prod_{l=1}^{l=N} (e_l+j-3) = 0$$

$$A_j \approx -j^2 \quad B_j \approx j^2(1+a+b) \quad C_j \approx -j^2(a+b+ab) \quad D_j \approx j^2 ab$$

$$Terme \quad J^{N+4} \rightarrow T_{N+4} = \sigma_0^{\ 3} + \sigma_0^{\ 2}(a+b+ab) + \sigma_0(1+a+b)ab + a^2b^2 = (a+\sigma_0)(b+\sigma_0)(a\,b+\sigma_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0 = -a \quad ou \quad \sigma_0 = -b \quad ou \quad \sigma_0 = -a\,b$$

En prenant diverses valeurs de N, le terme d'ordre N+3 est différent suivant les trois possibilités de valeurs de σ_0 :

$$Terme \quad J^{N+3} \rightarrow \begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow T_{N+3} = a^2(a-b)(b-1)(N+\delta+\varepsilon) = 0 \Rightarrow \delta+\varepsilon = -N \\ \sigma_0 = -b \rightarrow T_{N+3} = b^2(b-a)(a-1)(N+\delta+\zeta) = 0 \Rightarrow \delta+\zeta = -N \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow T_{N+3} = -a^2b^2(a-1)(b-1)(N+\varepsilon+\zeta) = 0 \Rightarrow \varepsilon+\zeta = -N \end{cases}$$

σ_0 étant désormais déterminé, σ l'est aussi , alors le paramètre ϑ_1 est choisi comme inconnu supplémentaire.

De plus la somme des termes $\sum_{l=0}^{l=N+4} T_l = \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = 0$ *présente une forme particulièrement simplifiée et au demeurant doit être également nulle, ce qui représente donc une réduction d'une équation supplémentaire, et d'après un résultat déjà obtenu assez facilement , il vient :*

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = -a^2(\alpha-1)(\beta-1)\left(\theta_0 \prod_{l=1}^{l=N} e_l + a\,\alpha\,\beta \prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)\right) = 0 \Rightarrow \theta_0 = -a\,\alpha\,\beta \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \\ \sigma_0 = -b \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = -b^2(\alpha-1)(\beta-1)\left(\theta_0 \prod_{l=1}^{l=N} e_l + b\,\alpha\,\beta \prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)\right) = 0 \Rightarrow \theta_0 = -b\,\alpha\,\beta \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = -a^2b^2(\alpha-1)(\beta-1)\left(\theta_0 \prod_{l=1}^{l=N} e_l + a\,b\,\alpha\,\beta \prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)\right) = 0 \Rightarrow \theta_0 = -a\,b\,\alpha\,\beta \dfrac{\prod_{l=1}^{l=N}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=N} e_l} \end{cases}$$

A ce stade le système de N+5 équations algébriques est donc réduit à N+2 équations puisque nous avons procéder à l'addition des N+3 équations algébriques qui restaient.

Une contrainte supplémentaire peut être introduite de manière artificielle en fixant l'une des valeurs des paramètres suivants : δ *ou* ε , δ *ou* ζ , ε *ou* ζ *à des valeurs d'entiers négatifs ou nuls. En effet comme :*

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \Rightarrow \delta + \varepsilon = -N \\ \sigma_0 = -b \Rightarrow \delta + \zeta = -N \\ \sigma_0 = -a\,b \Rightarrow \varepsilon + \zeta = -N \end{cases}$$

Cela revient à s'assurer de l'annulation des produits suivants :

$$\sigma_0 = -a \rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\varepsilon) = 0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(-l-\delta) = 0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\delta) = 0$$

$$\sigma_0 = -b \rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\delta) = 0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(-l-\zeta) = 0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\zeta) = 0$$

$$\sigma_0 = -a\,b \rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\zeta) = 0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(-l-\varepsilon) \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=N}(l+\varepsilon) = 0$$

L'introduction de cette contrainte n'est en réalité pas si artificielle, car sur les premiers exemples donnés pour N=0,1 et 2, celle-ci se trouve induite de facto en manipulant de manière adéquate les expressions parmi les N+2 équations algébriques restantes (voir les exemples ci-après).

Il reste donc à ce stade N+1 équations algébriques pour N+1 inconnus : $\theta_1, e_1, e_2, \ldots, e_N$ *. L'introduction des paramètres de produits symétriques* $s_0=1, s_1, s_2, \ldots, s_N$ *permet de linéariser partiellement le système initial d'équations algébriques. En effet les produits symétriques deviennent des sommes :*

$$\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l \qquad \prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l \qquad \prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-2)^l \qquad \prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)=\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-3)^l$$

Et entre autre relation précédente, celle ci se simplifie :

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \rightarrow s_N\theta_0=-a\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \\ \sigma_0=-b \rightarrow s_N\theta_0=-b\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \\ \sigma_0=-a\,b \rightarrow s_N\theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \end{cases}$$

Le système de N+5 équations algébriques devient :

$$\sigma_0^{\,3}A_{j-1}A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j)+\sigma_0^{\,2}C_{j-1}A_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-1)+\sigma_0B_{j-2}D_{j-1}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-2)+D_{j-1}D_{j-2}\times\prod_{l=1}^{l=N}(e_l+j-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0^{\,3}A_{j-1}A_{j-2}\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}\,j^l+\sigma_0^{\,2}C_{j-1}A_{j-2}\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-1)^l+\sigma_0B_{j-2}D_{j-1}\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-2)^l+D_{j-1}D_{j-2}\times\sum_{l=0}^{l=N}s_{N-l}(j-3)^l=0 \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{l=N+4}T_l\,j^l=0$$

Et il suffit de ne prendre que les N+3 premières équations algébriques : $T_l=0 \quad l\in\{0,1,\ldots,N\}$ *. Or par la linéarisation précédente toutes les expressions algébriques* T_l *sont des expressions linéaires des produits symétriques* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *.*

<u>Détermination de la relation entre les deux paramètres ϑ₀ et ϑ₁.</u>

Formellement les expressions :

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \rightarrow s_N\theta_0=-a\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \\ \sigma_0=-b \rightarrow s_N\theta_0=-b\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \\ \sigma_0=-a\,b \rightarrow s_N\theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta\sum_{l=0}^{l=N}s_l \end{cases}$$

peuvent se réécrire de la manière suivante (même si l'on sait que $s_0=1$*) :*

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \rightarrow s_N\theta_0=-a\,\alpha\,\beta\times\left(s_0+\sum_{l=1}^{l=N}s_l\right)\rightarrow s_0=-\dfrac{s_N\theta_0+a\,\alpha\,\beta\times+\sum_{l=1}^{l=N}s_l}{a\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0=-b \rightarrow s_N\theta_0=-b\,\alpha\,\beta\times\left(s_0+\sum_{l=1}^{l=N}s_l\right)\rightarrow s_0=-\dfrac{s_N\theta_0+b\,\alpha\,\beta\times+\sum_{l=1}^{l=N}s_l}{b\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0=-a\,b \rightarrow s_N\theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta\times\left(s_0+\sum_{l=1}^{l=N}s_l\right)\rightarrow s_0=-\dfrac{s_N\theta_0+a\,b\,\alpha\,\beta\times+\sum_{l=1}^{l=N}s_l}{a\,b\,\alpha\,\beta} \end{cases}$$

En injectant cette valeur dans le système étendu d'équations linéaires $T_l = 0 \quad l \in \{0,1,...,N+2\}$ *, ces dernières s'expriment sous la forme :*

$$\begin{cases} T_0 = 0 \Leftrightarrow T_{0,1}s_1 + T_{0,2}s_2 + ... + T_{0,N}s_N = 0 \\ T_1 = 0 \Leftrightarrow T_{1,1}s_1 + T_{1,2}s_2 + ... + T_{1,N}s_N = 0 \\ ... \\ T_N = 0 \Leftrightarrow T_{N,1}s_1 + T_{N,2}s_2 + ... + T_{N,N}s_N = 0 \\ T_{N+1} = 0 \Leftrightarrow T_{N+1,1}s_1 + T_{N+1,2}s_2 + ... + T_{N+1,N}s_N = 0 \\ T_{N+2} = 0 \Leftrightarrow T_{N+2,1}s_1 + T_{N+2,2}s_2 + ... + T_{N+2,N}s_N = 0 \end{cases} \qquad \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = 0$$

Chacun des coefficients $T_{i,j}$ est de la forme suivante :

$$\begin{cases} T_{i,1} = a_{i,1} + b_{i,1}\,\vartheta_0 + c_{i,1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,2} = a_{i,2} + b_{i,2}\,\vartheta_0 + c_{i,2}\,\vartheta_1 \\ ... \\ T_{i,N-1} = a_{i,N-1} + b_{i,N-1}\,\vartheta_0 + c_{i,N-1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,N} = a_{i,N} + b_{i,N}\,\vartheta_0 + c_{i,N}\,\vartheta_0^{\,2} + d_{i,N-1}\,\vartheta_0\vartheta_1 + d_{i,N-1}\,\vartheta_1 \end{cases}$$

En prenant par exemple les N premières équations linéaires, ce système admet une solution non triviale si son déterminant est nul :

$$D = \begin{bmatrix} T_{0,1} & T_{0,2} & ... & ... & T_{0,N} \\ T_{1,1} & T_{1,2} & ... & ... & T_{1,N} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ T_{N-1,1} & T_{N-1,2} & ... & ... & T_{N-1,N} \end{bmatrix} = 0$$

Cela donne une relation polynomiale entre les deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1 , dont le degré du polynôme en ϑ_0 est N+1 et celui en ϑ_1 est de N. Toutefois les combinaisons de choix des N équations linéaires est multiple, de N équations parmi N+3, soit $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *.*

Soit l'un quelconque de ces déterminants, par exemple le premier, illustré plus haut, il est de la forme suivante, d'après les expressions polynomiales de premier ou deuxième degré en ϑ_0 et ϑ_1 de chacun des constituants de la matrice :

$$D = P_{N+1,0}(\vartheta_0) + P_{N,1}(\vartheta_0)\,\vartheta_1 + P_{N-1,2}(\vartheta_0)\,\vartheta_1^{\,2} + ... + P_{1,N}(\vartheta_0)\,\vartheta_1^{\,N} = 0$$
$$\text{où} \quad P_{i,j}(\vartheta_0) \quad \text{polynôme de degré i en } \vartheta_0$$

Si maintenant on prend N déterminants parmi les $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ déterminants possibles, soit ici $C_N^{\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}}$ choix possibles, alors on peut former un système linéaire de puissance de ϑ_1 de la forme :

$$\begin{cases} D_1 = a_{0,1} + a_{1,1}\vartheta_1 + ... + a_{N,1}\vartheta_1^{\ N} = 0 \\ D_2 = a_{0,2} + a_{1,2}\vartheta_2 + ... + a_{N,2}\vartheta_1^{\ N} = 0 \\ ... \\ D_N = a_{0,N} + a_{1,N}\vartheta_1 + ... + a_{N,N}\vartheta_1^{\ N} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}\vartheta_1 + ... + a_{N,1}\vartheta_1^{\ N} = -a_{0,1} \\ a_{1,2}\vartheta_2 + ... + a_{N,2}\vartheta_1^{\ N} = -a_{0,2} \\ ... \\ a_{1,N}\vartheta_1 + ... + a_{N,N}\vartheta_1^{\ N} = -a_{0,N} \end{cases}$$

Système que l'on peut inverser pour trouver la valeur de ϑ_1 en fonction des coefficients $a_{i,j}$:

$$\vartheta_1 = \begin{bmatrix} -a_{0,1} & a_{2,1} & ... & ... & a_{N,1} \\ -a_{0,2} & a_{2,2} & ... & ... & a_{N,2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{0,N} & a_{2,N} & ... & ... & a_{N,N} \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & ... & ... & a_{N,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & ... & ... & a_{N,2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1,N} & a_{2,N} & ... & ... & a_{N,N} \end{bmatrix}$$

<u>Étant donné que les coefficients sont sous une forme polynomiale en ϑ_0</u> :

$$\begin{cases} a_{0,i} = P_{N+1}(\vartheta_0) \\ a_{1,i} = P_N(\vartheta_0) \\ a_{2,i} = P_{N-1}(\vartheta_0) \\ ... \\ a_{N,i} = P_1(\vartheta_0) \end{cases}$$

Le déterminant au numérateur de l'expression de ϑ_1 est de degré :

$$\begin{bmatrix} -a_{0,1} & a_{2,1} & ... & ... & a_{N,1} \\ -a_{0,2} & a_{2,2} & ... & ... & a_{N,2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{0,N} & a_{2,N} & ... & ... & a_{N,N} \end{bmatrix} \quad degré \quad 1+2+...+N-1+N-1 = \frac{N^2+N+2}{2} \quad en \quad \vartheta_0$$

Le déterminant au dénominateur de l'expression de ϑ_1 est de degré :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & ... & ... & a_{N,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & ... & ... & a_{N,2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1,N} & a_{2,N} & ... & ... & a_{N,N} \end{bmatrix} \quad degré \quad 1+2+...+N = \frac{N(N+1)}{2} \quad en \quad \vartheta_0$$

Dans ces conditions le paramètre ϑ_1 est une fraction polynomiale de la forme : $\vartheta_1 = \frac{P_{\frac{N^2+N+2}{2}}(\vartheta_0)}{Q_{\frac{N(N+1)}{2}}(\vartheta_0)}$ *qui est déterminé uniquement si tant est que ϑ_0 le soit.*

Une fois la valeur de ϑ_1 injectée dans les $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *déterminants, la factorisation polynomiale au numérateur de chacune de ces expressions donne un polynôme dont le plus grand commun diviseur est de degré f(N) en ϑ_0 . Ici, pour N=1, f(1)=2, pour N=2, f(2)=4, pour N=3, f(3)=6, pour N=4, f(4)=9, pour N=5, f(5)=12, pour N=6, f(6)=16 et pour N=7, f(7)=20,*

Les racines de ce polynôme diviseur des $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *déterminants sont les valeurs admissibles de ϑ_0 . Il s'ensuit une unique valeur de ϑ_1 en fonction de la valeur choisie de ϑ_0 .*

Étant donné qu'ont lieu les relations

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow s_N\theta_0 = -a\,\alpha\,\beta \sum_{l=0}^{l=N} s_l \\ \sigma_0 = -b \rightarrow s_N\theta_0 = -b\,\alpha\,\beta \sum_{l=0}^{l=N} s_l \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow s_N\theta_0 = -a\,b\,\alpha\,\beta \sum_{l=0}^{l=N} s_l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_N = -\frac{a\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + a\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \\ s_N = -\frac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + b\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \\ s_N = -\frac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \end{cases}$$

Les seules N-1 valeurs des produits symétriques s_l sont nécessaires, ce qui se traduit par le choix de N-1 premières équations linéaires, par exemple les premières (il y a $C_{N-1}^{N+3} = \frac{(N+3)(N+2)(N+1)N}{24}$ *choix possibles pour ce système d'équations linéaires) :*

$$\begin{cases} T_{0,1}s_1 + T_{0,2}s_2 + \ldots + T_{0,N}s_N = 0 \\ T_{1,1}s_1 + T_{1,2}s_2 + \ldots + T_{1,N}s_N = 0 \\ \ldots \\ T_{N-2,1}s_1 + T_{N-2,2}s_2 + \ldots + T_{N-2,N}s_N = 0 \end{cases}.$$

Ici les équations linéaires ne sont plus considérées comme homogènes puisque la valeur de s_N qui est injectée donne un second membre non nul au système linéaire sur les s_1 à s_{N-1} inconnus. Par inversion du système linéaire on en déduit les valeur de s_1 à s_{N-1} puis de s_N .

Ayant toutes les valeurs de s_N , remarquons que : $\prod_{l=1}^{l=N}(z+e_l) = z^N + \sum_{l=1}^{l=N-1} z^{N-l}s_l + s_N$ *donc si nous formons le polynôme en z :* $z^N + \sum_{l=1}^{l=N-1} z^{N-l}s_l + s_N$ *alors toutes les racines de ce polynôme sont l'opposée des valeurs recherchées de e_l:* $-e_l \quad racines\ de \quad z^N + \sum_{l=1}^{l=N-1} z^{N-l}s_l + s_N = 0$ *. Il suffit de prendre ces dernières racines dans un ordre fixé pour déterminer toutes les valeurs des e_l.*

Finalement comme ϑ_0 est racine d'un polynôme de degré f(N), il existe f(N) solutions et de plus toute expression polynomiale en ϑ_0 de degré f(N)>2N peut être ramenée à une expression polynomiale de degré f(N)-1. Il en est ainsi de l'expression fractionnaire de ϑ_1 pour N=2,3,4,5,6 et 7 :

$$\begin{cases} N=1 \to f(1)=2 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_2(\vartheta_0)}{Q_1(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_1(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_1(\vartheta_0)} \\ N=2 \to f(2)=4 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_4(\vartheta_0)}{Q_3(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_3(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_3(\vartheta_0)} \\ N=3 \to f(3)=6 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_7(\vartheta_0)}{Q_6(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_5(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_5(\vartheta_0)} \\ N=4 \to f(4)=9 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_{11}(\vartheta_0)}{Q_{10}(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_8(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_8(\vartheta_0)} \\ N=5 \to f(5)=12 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_{16}(\vartheta_0)}{Q_{15}(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_{11}(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_{11}(\vartheta_0)} \\ N=6 \to f(6)=16 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_{22}(\vartheta_0)}{Q_{21}(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_{15}(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_{15}(\vartheta_0)} \\ N=7 \to f(7)=20 \to \vartheta_1 = \dfrac{P_{29}(\vartheta_0)}{Q_{28}(\vartheta_0)} = \dfrac{\tilde{P}_{19}(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_{19}(\vartheta_0)} \end{cases}$$

<u>Par exemple si N=2,</u> *il y a* $C_2^5 = \frac{3\times4\times5}{6} = 10$ *déterminants 2x2, chaque déterminant est de degré N+1=3 en ϑ_0 et de degré N=2 en ϑ_1 . En prenant deux quelconques de ces 10 déterminants parmi les* $C_2^{10} = 45$ *possibilités une relation directe entre ϑ_1 et ϑ_0 peut être établie sous une forme rationnelle :* $\theta_1 = \frac{P_4(\theta_0)}{Q_3(\theta_0)}$ *entre un polynôme de degré* $\frac{N^2+N+2}{2} = 4$ *au numérateur en ϑ_0 et un polynôme de degré* $\frac{N(N+1)}{2} = 3$ *en ϑ_0 au dénominateur. L'injection de cette relation dans les 10 différents déterminants, après mise en facteur commun, donne un numérateur de degré au plus égal à 9 en ϑ_0 qui s'annule. En recherchant entre ces 10 déterminants le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique à un polynôme de deux degré 4 en ϑ_0 devant s'annuler. Parfois ce dernier polynôme se factorise en deux polynôme de degré 2 en ϑ_0 . Ainsi pour N=2, en pratique ϑ_0 est racine d'un polynôme de degré 4 ou de deux polynômes de degré 2 en ϑ_0 , l'une des relations* $\theta_1 = \frac{P_4(\theta_0)}{Q_3(\theta_0)} = \frac{\tilde{P}_3(\theta_0)}{Q_3(\theta_0)}$ *fixe la valeur unique de ϑ_1 . Et l'on vérifie que les 45 autres relations sur ϑ_1 donne bien la même valeur. Pour déterminer les valeurs de s_1 et s_2 , il suffit de ne prendre que l'une des 5 équations linéaires de base, sachant que s_1 est une fonction linéaire de s_2 . Pour déterminer e_1 et e_2 il suffit de trouver les racines du polynôme :* $e_1, e_2 \quad racines\ de \quad z^2 - s_1 z + s_2 = 0$.

Si N=3, *il y a* $C_3^6 = 20$ *déterminants 3x3, chaque déterminant est de degré N+1=4 en* ϑ_0 *et de degré N=3 en* ϑ_1 *. En prenant trois quelconques de ces 20 déterminants parmi les* $C_3^{20} = 1140$ *possibilités une relation directe entre* ϑ_1 *et* ϑ_0 *peut être établie sous une forme rationnelle :* $\theta_1 = \frac{P_7(\theta_0)}{Q_6(\theta_0)}$ *entre un polynôme de degré* $\frac{N^2+N+2}{2} = 7$ *au numérateur en* ϑ_0 *et un polynôme de degré* $\frac{N(N+1)}{2} = 6$ *en* ϑ_0 *au dénominateur. L'injection de cette relation dans les 20 différents déterminants, après mise en facteur commun, et en recherchant entre ces derniers le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique à un polynôme de deux degré 6 en* ϑ_0 *devant s'annuler. Parfois ce dernier polynôme se factorise en deux polynômes de degré 3 en* ϑ_0 *. Ainsi pour N=3, en pratique* ϑ_0 *est racine d'un polynôme de degré 6 (ou de deux polynômes de degré 3 en* ϑ_0 *exceptionnellement), l'une des relations* $\theta_1 = \frac{P_7(\theta_0)}{Q_6(\theta_0)} = \frac{\widetilde{P}_5(\theta_0)}{\widetilde{Q}_5(\theta_0)}$ *fixe la valeur unique de* ϑ_1 *. Et l'on s'assure que les 1140 autres relations sur* ϑ_1 *donne bien la même valeur. Pour déterminer les valeurs de* s_1, s_2 *et* s_3 *, il suffit de ne prendre que la combinaison de 2 équations linéaires, parmi les N+3=6 équations linéaires de base, soit 20 choix possibles, sachant que* s_3 *est une fonction linéaire de* s_1 *et* s_2 *. Pour déterminer* e_1, e_2 *et* e_3 *il suffit de trouver les racines du polynôme :*

$$-e_1, -e_2, -e_3 \quad \textit{racines de} \quad z^3 + s_1 z^2 + s_2 z + s_3 = 0 \Leftrightarrow e_1, e_2, e_3 \quad \textit{racines de} \quad z^3 - s_1 z^2 + s_2 z - s_3 = 0$$

Si N=4 : *il y a* $C_4^7 = 35$ *déterminants 4x4, chaque déterminant est de degré N+1=5 en* ϑ_0 *et de degré N=4 en* ϑ_1 *. En prenant 4 quelconques de ces 35 déterminants parmi les* $C_4^{35} = 52360$ *possibilités une relation directe entre* ϑ_1 *et* ϑ_0 *peut être établie sous une forme rationnelle :* $\theta_1 = \frac{P_{11}(\theta_0)}{Q_{10}(\theta_0)}$ *entre un polynôme de degré* $\frac{N^2+N+2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + 1 = 11$ *au numérateur en* ϑ_0 *et un polynôme de degré* $\frac{N(N+1)}{2} = 10$ *en* ϑ_0 *au dénominateur. L'injection de cette relation dans les 35 différents déterminants, après mise en facteur commun, et en recherchant entre ces derniers le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique à un polynôme de deux degré 9 en* ϑ_0 *devant s'annuler. Ainsi pour N=4, en pratique* ϑ_0 *est racine d'un polynôme de degré 9 , l'une des relations* $\theta_1 = \frac{P_{11}(\theta_0)}{Q_{10}(\theta_0)} = \frac{\widetilde{P}_8(\theta_0)}{\widetilde{Q}_8(\theta_0)}$ *fixe la valeur unique de* ϑ_1 *. Et l'on peut essayer de « s'assurer » que les 52360 autres relations sur* ϑ_1 *donne bien la même valeur. Pour déterminer les valeurs de* s_1,s_2 ,s_3 *et* s_4 *, il suffit de ne prendre que la combinaison de N-1=3 équations linéaires, parmi les N+3=7 équations linéaires de base, soit* $\frac{(N+3)(N+2)(N+1)N}{24} = 35$ *choix possibles, sachant que* s_4 *est une fonction linéaire de* s_1,s_2 ,s_3 *. Pour déterminer* e_1, e_2, e_3 *et* e_4 *il suffit de trouver les racines du polynôme :*

$$-e_1, -e_2, -e_3, -e_4 \quad \textit{racines de} \quad z^4 + s_1 z^3 + s_2 z^2 + s_3 z + s_4 = 0 \Leftrightarrow e_1, e_2, e_3, e_4 \quad \textit{racines de} \quad z^4 - s_1 z^3 + s_2 z^2 - s_3 z + s_4 = 0$$

Si N=5 : *il y a* $C_5^8 = 56$ *déterminants 5x5, chaque déterminant est de degré N+1=6 en* ϑ_0 *et de degré N=5 en* ϑ_1 *. En prenant 5 quelconques de ces 56 déterminants parmi les* $C_5^{56} = 3819816$ *possibilités une relation directe entre* ϑ_1 *et* ϑ_0 *peut être établie sous une forme rationnelle :* $\theta_1 = \frac{P_{16}(\theta_0)}{Q_{15}(\theta_0)}$ *entre un polynôme de degré* $\frac{N^2+N+2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + 1 = 16$ *au numérateur en* ϑ_0 *et un polynôme de degré* $\frac{N(N+1)}{2} = 15$ *en* ϑ_0 *au dénominateur. L'injection de cette relation dans les 56 différents déterminants, après mise en facteur commun, et en recherchant entre ces derniers le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique à un polynôme de deux degré 12 en* ϑ_0 *devant s'annuler. Ainsi pour N=5, en pratique* ϑ_0 *est racine d'un polynôme de degré 12 , l'une des relations* $\theta_1 = \frac{P_{16}(\theta_0)}{Q_{15}(\theta_0)} = \frac{\widetilde{P}_{11}(\theta_0)}{\widetilde{Q}_{11}(\theta_0)}$ *fixe la valeur unique de* ϑ_1 *. Et l'on peut essayer de « s'assurer » que les 3819816 autres relations sur* ϑ_1 *donne bien la même valeur. Pour déterminer les valeurs de* s_1, s_2, s_3, s_4 *et* s_5 *, il suffit de ne prendre que la combinaison de N-1=4 équations linéaires, parmi les N+3=8 équations linéaires de base, soit* $\frac{(N+3)(N+2)(N+1)N}{24} = 70$ *choix possibles, sachant que* s_5 *est une fonction linéaire de* s_1, s_2, s_3, s_4 *. Pour déterminer* e_1, e_2, e_3, e_4 *et* e_5 *il suffit de trouver les racines du polynôme :*

$$-e_1, -e_2, -e_3, -e_4, -e_5 \quad \text{racines de} \quad z^5 + s_1 z^4 + s_2 z^3 + s_3 z^2 + s_4 z + s_5 = 0 \Leftrightarrow e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \quad \text{racines de} \quad z^5 - s_1 z^4 + s_2 z^3 - s_3 z^2 + s_4 z - s_5 = 0$$

Si N=6 : *il y a* $C_6^9 = 84$ *déterminants 6x6, chaque déterminant est de degré N+1=7 en* ϑ_0 *et de degré N=6 en* ϑ_1 *. En prenant 6 quelconques de ces 84 déterminants parmi les* $C_6^{84} = 406481544$ *possibilités une relation directe entre* ϑ_1 *et* ϑ_0 *peut être établie sous une forme rationnelle :* $\theta_1 = \frac{P_{22}(\theta_0)}{Q_{21}(\theta_0)}$ *entre un polynôme de degré* $\frac{N^2+N+2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + 1 = 22$ *au numérateur en* ϑ_0 *et un polynôme de degré* $\frac{N(N+1)}{2} = 21$ *en* ϑ_0 *au dénominateur. L'injection de cette relation dans les 84 différents déterminants, après mise en facteur commun, et en recherchant entre ces derniers le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique à un polynôme de deux degré 16 en* ϑ_0 *devant s'annuler. Ainsi pour N=6, en pratique* ϑ_0 *est racine d'un polynôme de degré 16 , l'une des relations* $\theta_1 = \frac{P_{22}(\theta_0)}{Q_{21}(\theta_0)} = \frac{\widetilde{P}_{15}(\theta_0)}{\widetilde{Q}_{15}(\theta_0)}$ *fixe la valeur unique de* ϑ_1 *. Et l'on peut essayer de « s'assurer » que les 406 481 544 autres relations sur* ϑ_1 *donne bien la même valeur. Pour déterminer les valeurs de* s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 *et* s_6 *, il suffit de ne prendre que la combinaison de N-1=5 équations linéaires, parmi les N+3=9 équations linéaires de base, soit* $\frac{(N+3)(N+2)(N+1)N}{24} = 126$ *choix possibles, sachant que* s_6 *est une fonction linéaire de* s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 *. Pour déterminer* e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 *et* e_6 *il suffit de trouver les racines du polynôme :*

$$-e_1, -e_2, -e_3, -e_4, -e_5, -e_6 \quad \text{racines de} \quad z^6 + s_1 z^5 + s_2 z^4 + s_3 z^3 + s_4 z^2 + s_5 z + s_6 = 0 \Leftrightarrow e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \quad \text{racines de} \quad z^6 - s_1 z^5 + s_2 z^4 - s_3 z^3 + s_4 z^2 - s_5 z + s_6 = 0$$

Algorithme de détermination des solutions hyper-géométriques généralisées

1- Obtention d'un système de N+5 équation linéaires sur les variables s_1, s_2 , …, s_N

$$\sigma_0^{\,3} A_{j-1} A_{j-2} \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l}\, j^l + \sigma_0^{\,2} C_{j-1} A_{j-2} \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-1)^l + \sigma_0 B_{j-2} D_{j-1} \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-2)^l + D_{j-1} D_{j-2} \times \sum_{l=0}^{l=N} s_{N-l} (j-3)^l = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{l=N+4} T_l\, j^l = 0$$

$$\begin{cases} A_j = -(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j = \vartheta_1 + j\,((j+\alpha+\beta)(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta) \\ C_j = \vartheta_0 - j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) \\ D_j = j\,a\,b\,(\gamma+j-1) \end{cases}$$

2 – Les équations de terme j^{N+4} et j^{N+3} donnent les relations suivantes entre les paramètres

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow \sigma = \dfrac{1}{a} \\ \sigma_0 = -b \rightarrow \sigma = \dfrac{1}{b} \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow \sigma = 1 \end{cases}$$

Ainsi que $\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow \delta + \varepsilon = -N \\ \sigma_0 = -b \rightarrow \delta + \zeta = -N \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow \varepsilon + \zeta = -N \end{cases}$

3 – L'addition des N+3 premières équations linéaires donne les relations suivantes entre les paramètres s_1, s_2 , …, s_N et ϑ_0

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow s_N \theta_0 = -a\,\alpha\,\beta \times \left(s_0 + \sum_{l=1}^{l=N} s_l \right) \rightarrow s_0 = -\dfrac{s_N \theta_0 + a\,\alpha\,\beta \times + \sum_{l=1}^{l=N} s_l}{a\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0 = -b \rightarrow s_N \theta_0 = -b\,\alpha\,\beta \times \left(s_0 + \sum_{l=1}^{l=N} s_l \right) \rightarrow s_0 = -\dfrac{s_N \theta_0 + b\,\alpha\,\beta \times + \sum_{l=1}^{l=N} s_l}{b\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow s_N \theta_0 = -a\,b\,\alpha\,\beta \times \left(s_0 + \sum_{l=1}^{l=N} s_l \right) \rightarrow s_0 = -\dfrac{s_N \theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta \times + \sum_{l=1}^{l=N} s_l}{a\,b\,\alpha\,\beta} \end{cases}$$

4 - En injectant cette valeur de s_0 dans le système étendu d'équations linéaires $T_l = 0 \quad l \in \{0,1,...,N+2\}$ *, sachant que s_0=1, ces dernières équations linéaires s'expriment sous une forme homogène :*

$$\begin{cases} T_0 = 0 \Leftrightarrow T_{0,1}s_1 + T_{0,2}s_2 + ... + T_{0,N}s_N = 0 \\ T_1 = 0 \Leftrightarrow T_{1,1}s_1 + T_{1,2}s_2 + ... + T_{1,N}s_N = 0 \\ ... \\ T_N = 0 \Leftrightarrow T_{N,1}s_1 + T_{N,2}s_2 + ... + T_{N,N}s_N = 0 \\ T_{N+1} = 0 \Leftrightarrow T_{N+1,1}s_1 + T_{N+1,2}s_2 + ... + T_{N+1,N}s_N = 0 \\ T_{N+2} = 0 \Leftrightarrow T_{N+2,1}s_1 + T_{N+2,2}s_2 + ... + T_{N+2,N}s_N = 0 \end{cases} \qquad \sum_{l=0}^{l=N+2} T_l = 0$$

où chacun coefficients $T_{i,j}$ est de la forme suivante :

$$\begin{cases} T_{i,1} = a_{i,1} + b_{i,1}\,\vartheta_0 + c_{i,1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,2} = a_{i,2} + b_{i,2}\,\vartheta_0 + c_{i,2}\,\vartheta_1 \\ ... \\ T_{i,N-1} = a_{i,N-1} + b_{i,N-1}\,\vartheta_0 + c_{i,N-1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,N} = a_{i,N} + b_{i,N}\,\vartheta_0 + c_{i,N}\,\vartheta_0^{\,2} + d_{i,N-1}\,\vartheta_0\vartheta_1 + d_{i,N-1}\,\vartheta_1 \end{cases}$$

5 – La condition pour que ce système d'équations linéaires possèdent une solution non triviale est que l'ensemble des déterminants de toutes les combinaisons possibles des N équations parmi N+3, soit $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$*, doit s'annuler, chacun de ces déterminants ayant la forme suivante (en renumérotant de 1 à N les équations linéaires sélectionnées :*

$$D = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & ... & ... & T_{1,N} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & ... & ... & T_{2,N} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ T_{N,1} & T_{N,2} & ... & ... & T_{N,N} \end{bmatrix} = 0$$

6 - L'annulation de ces déterminants établit une relation polynomiale entre ϑ_0 et ϑ_1 de la forme suivante :

$$D = P_{N+1,0}(\vartheta_0) + P_{N,1}(\vartheta_0)\,\vartheta_1 + P_{N-1,2}(\vartheta_0)\,\vartheta_1^{\,2} + ... + P_{1,N}(\vartheta_0)\,\vartheta_1^{\,N} = 0$$
$$\text{où} \quad P_{i,j}(\vartheta_0) \quad \text{polynôme de degré i en } \vartheta_0$$

En prenant N déterminants parmi les $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *déterminants possibles, alors on peut former un système linéaire de puissance de ϑ_1 de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1,1}\vartheta_1 + ... + a_{N,1}\vartheta_1^{\,N} = -\,a_{0,1} \\ a_{1,2}\vartheta_2 + ... + a_{N,2}\vartheta_1^{\,N} = -\,a_{0,2} \\ ... \\ a_{1,N}\vartheta_1 + ... + a_{N,N}\vartheta_1^{\,N} = -\,a_{0,N} \end{cases}$$

, que l'on peut inverser .

On trouve la valeur de ϑ_1 : $\vartheta_1 = \begin{bmatrix} -a_{0,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{N,1} \\ -a_{0,2} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{0,N} & a_{2,N} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{N,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,N} & a_{2,N} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix}$ *et où le paramètre ϑ_1 est une fraction polynomiale de la forme :* $\vartheta_1 = \frac{P_{\frac{N^2+N+2}{2}}(\vartheta_0)}{Q_{\frac{N(N+1)}{2}}(\vartheta_0)}$ *qui est déterminé uniquement si tant est que ϑ_0 le soit. Normalement il y a un choix très vastes de N déterminants parmi les* $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *disponibles. En pratique il suffit de prendre les N premiers, en ayant ordonné les* $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *expressions originales en utilisant l'ordre naturelle « lexicographique » des combinaisons possibles. Il se peut que par ce premier choix le déterminant du système des puissances de ϑ_1 s'annule :*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{N,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,N} & a_{2,N} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} = 0$$

Dans ce cas il suffit de décaler le premier index choisi d'une unité dans les $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *expressions, jusqu'à ce que le déterminant ne s'annule pas :* $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{N,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{N,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,N} & a_{2,N} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \neq 0$

7 - Une fois la valeur de ϑ_1 injectée dans les $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *déterminants, la factorisation polynomiale au numérateur de chacune de ces expressions donne un polynôme <u>dont le plus grand commun diviseur est de degré f(N) en ϑ_0</u> . Ici, pour N=1, f(1)=2, pour N=2, f(2)=4, pour N=3, f(3)=6, pour N=4, f(4)=9, pour N=5, f(5)=12, pour N=6, f(6)=16 et pour N=7, f(7)=20, … Les racines de ce polynôme diviseur des* $C_N^{N+3} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ *déterminants sont les valeurs admissibles de ϑ_0 . Il s'ensuit une unique valeur de ϑ_1 en fonction de la valeur choisie de ϑ_0 . En théorie, quelque soit le choix des N expressions pour la détermination de ϑ_1 en fonction de ϑ_0, le PGCD polynomial obtenu doit être le même. En pratique il est effectivement le même. Puisque ϑ_0 est racine d'un polynôme de degré f(N) et que* $\frac{N^2+N+2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + 1 > f(N)$ *et* $\frac{N(N+1)}{2} > f(N)$*, alors* $\vartheta_1 = \frac{P_{f(N)-1}(\vartheta_0)}{Q_{f(N)-1}(\vartheta_0)}$

8 – En revenant aux N-1 premières équations linéaires : $\begin{cases} T_{0,1}s_1 + T_{0,2}s_2 + \ldots + T_{0,N}s_N = 0 \\ T_{1,1}s_1 + T_{1,2}s_2 + \ldots + T_{1,N}s_N = 0 \\ \ldots \\ T_{N-2,1}s_1 + T_{N-2,2}s_2 + \ldots + T_{N-2,N}s_N = 0 \end{cases}$ *et en substituant les relations suivantes* $\begin{cases} \sigma_0 = -a \rightarrow s_N = -\dfrac{a\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + a\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \\ \sigma_0 = -b \rightarrow s_N = -\dfrac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + b\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow s_N = -\dfrac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta} \times \left(1 + \sum_{l=1}^{l=N-1} s_l\right) \end{cases}$ *le système de N-1 équations linéaires n'est plus homogène et permet de déterminer alors les variables* $s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}$ *puis* s_N

9 - les valeurs recherchées de e_l *sont racines dans un ordre fixé d'un polynôme formé à partir des valeurs de* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *comme suit :* $-e_l$ *racines de* $z^N + \sum_{l=1}^{l=N-1} z^{N-l} s_l + s_N = 0$.

<u>Fin de l'algorithme de construction</u>

Le processus de détermination des valeurs possibles de ϑ_0 *et* ϑ_1 *est donc complexe et déterminer de manière certaine le degré et la forme du polynôme pour lequel* ϑ_0 *est une racine n'est pas aisée, tant que l'on ne fixe pas des valeurs numériques aux paramètres (voir les exemples donnés pour N=2,3,4,5,6,7, plus loin).*

Aussi pour l'instant je ne retrouve pas complètement les résultats donnés dans l'article daté de 2019 des auteurs A.M.Ishkhanyan, C.Cesarano « Generalized-Hypergeometric Solutions of the General Fuchsian Linear ODE Having five regularities» pour ce qui est du cas non trivial pour N=2 (c'est à dire le cas où l'équation différentielle fuschienne à 5 points réguliers n'est pas réductible à l'équation de Heun ou l'équation hyper-géométrique).

Illustrons la construction de ces solutions par des exemples concrets dans ce qui suit.

<u>Prenons comme exemple la première valeur N=0 :</u>

Il y a 5 équations algébriques dont l'annulation doit permettre de définir la solution recherchée, la cinquième équation détermine trois valeurs σ_0 et la quatrième la relation entre deux des paramètres $\delta+\varepsilon=0 \quad \delta+\zeta=0 \quad ou \quad \varepsilon+\zeta=0$. *Les trois valeurs de σ_0 donnent celles liant deux des paramètres parmi δ,ε,ζ puis l'addition des équations 1,2 et 3 donne le paramètre ϑ_0 (par l'annulation de cette somme) :*

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \Rightarrow \delta+\varepsilon=0 \Rightarrow \theta_0=-a\,\alpha\,\beta \\ \sigma_0=-b \Rightarrow \delta+\zeta=0 \Rightarrow \theta_0=-b\,\alpha\,\beta \\ \sigma_0=-a\,b \Rightarrow \varepsilon+\zeta=0 \Rightarrow \theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta \end{cases}$$

On ne peut donc jouer que sur les équations n°1 et n°2. A chaque fois l'annulation de la première équation algébrique défini une valeur du paramètre ϑ_1 qui injectée dans la deuxième équation induit par l'annulation de cette dernière les annulations suivantes et la valeur résultante de ϑ_1 :

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \Rightarrow \delta=\varepsilon=0 \Rightarrow \theta_1=(1+a)\alpha\,\beta \quad et \quad \theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0 \\ \sigma_0=-b \Rightarrow \delta=\zeta=0 \Rightarrow \theta_1=(1+b)\alpha\,\beta \quad et \quad \theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0 \\ \sigma_0=-a\,b \Rightarrow \varepsilon=\zeta=0 \Rightarrow \theta_1=(a+b)\alpha\,\beta \quad et \quad \theta_1=b\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b} \end{cases}$$

Le cas est donc trivial car il ne s'agit que de transformer l'équation fuchsienne à 5 points réguliers à celle à trois points réguliers qui n'est autre que l'équation différentielle hypergéométrique et dont on retrouve d'ailleurs les valeurs des deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1 .

Au passage on note que la condition supplémentaire est bien respectée :

$$\sigma_0=-a \rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\varepsilon)=0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\delta)=0$$
$$\sigma_0=-b \rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\delta)=0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\zeta)=0$$
$$\sigma_0=-a\,b \rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\zeta)=0 \Rightarrow \prod_{l=0}^{l=0}(l+\varepsilon)=0$$

Prenons comme exemple la deuxième valeur N=1 :

Nous allons voir que l'on retrouve bien les relations entre les paramètres ϑ_0 et ϑ_1 lors des cas de réductions de l'équation à 5 points réguliers vers l'équation à 4 points réguliers (Heun).

Il y a 6 équations algébriques dont l'annulation doit permettre de définir la solution recherchée, la cinquième équation T_5=0 détermine trois valeurs σ_0 et la quatrième T_4=0 donne les valeur de $\delta+\varepsilon=0 \quad \delta+\zeta=0 \quad ou \quad \varepsilon+\zeta=0$. Les trois valeurs de σ_0 donnent celles liant deux des paramètres parmi δ,ε,ζ puis l'addition des équations T_0=0,T_1=0,T_2=0 et T_3=0 donne le paramètre ϑ_0 en fonction de e_1 (par l'annulation de cette somme $T_0+T_1+T_2+T_3$=0) :

$$\begin{cases} \sigma_0=-a \Rightarrow \delta+\varepsilon=-1 \Rightarrow \theta_0=-a\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1} \\ \sigma_0=-b \Rightarrow \delta+\zeta=-1 \Rightarrow \theta_0=-b\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1} \\ \sigma_0=-a\,b \Rightarrow \varepsilon+\zeta=-1 \Rightarrow \theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1} \end{cases}$$

On ne peut donc jouer que sur les équations T_0=0, T_1=0 et T_2=0. Comme le suggère l'article de 2019 des auteurs A.M.Ishkhanyan et C.Cesarano, «Generalized-Hypergeometric Solutions of the General Fuchsian Linear ODE Having Five Regular Singularities », il convient de fixer des valeurs entières négatives aux paramètres :

$$\begin{array}{lll} \sigma_0=-a \rightarrow 1+\varepsilon+\delta=0 & \varepsilon(1+\varepsilon)=0 & \delta\,(1+\delta)=0 \\ \sigma_0=-b \rightarrow 1+\zeta+\delta=0 & \delta(1+\delta)=0 & \zeta\,(1+\zeta)=0 \\ \sigma_0=-a\,b \rightarrow 1+\zeta+\varepsilon=0 & \zeta(1+\zeta)=0 & \varepsilon\,(1+\varepsilon)=0 \end{array}$$

En effet si l'on ne fixe pas ces paramètres à des valeurs entières négatives, on n'obtient pas de prime abord des factorisations simples et cohérentes émanant les équations T_0=0, T_1=0 et T_2=0. Rappelons que si l'un des paramètres suivant s'annule, il y a les relations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \delta=0 \rightarrow \theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0 \\ \varepsilon=0 \rightarrow \theta_1=a\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{a} \\ \zeta=0 \rightarrow \theta_1=b\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b} \end{cases}$$

En revanche en prenant les valeurs suivantes de ε et δ pour le premier cas $\sigma_0=-a$, on arrive aux solutions suivantes dans lesquelles le paramètre e_1 est à chaque fois racine d'une équation polynomiale du second degré (mais également ϑ_0 et ϑ_1 , voir la suite) :

$$\sigma_0=-a \Rightarrow \delta+\varepsilon=-1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_0=-a\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1} \\ e_1=-\dfrac{a\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,\alpha\,\beta} \\ \dfrac{1}{e_1}=-1-\dfrac{\theta_0}{a\,\alpha\,\beta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta=-1 \quad \varepsilon=0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1=a\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{a} \\ e_1\left(-\beta+b\left(1+\beta-\zeta-e_1\right)+e_1\right)+\alpha\left(\beta+(b-1)e_1\right)=0 \end{cases} \\ \delta=0 \quad \varepsilon=-1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0 \\ a\left(\beta-e_1\right)\left(\alpha-e_1\right)+b\,e_1\left(\gamma-1-e_1\right)=0 \end{cases} \end{cases}$$

pour le deuxième cas $\sigma_0=-b$, on arrive aux solutions suivantes :

$$\sigma_0=-b\Rightarrow\delta+\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_0=-b\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1}\\ \dfrac{1}{e_1}=-1-\dfrac{\theta_0}{b\,\alpha\,\beta}\\ e_1=-\dfrac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+b\,\alpha\,\beta}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\delta=-1\quad\zeta=0\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=b\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b}\\ e_1\left(-\beta+a\left(1+\beta-\varepsilon-e_1\right)+e_1\right)+\alpha\left(\beta+\left(a-1\right)e_1\right)=0\end{cases}\\ \delta=0\quad\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0\\ b\left(\beta-e_1\right)\left(\alpha-e_1\right)+a\,e_1\left(\gamma-1-e_1\right)=0\end{cases}\end{cases}$$

Pour le troisième cas $\sigma_0=-a\,b$, on arrive aux solutions suivantes :

$$\sigma_0=-a\,b\Rightarrow\varepsilon+\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_0=-a\,b\,\alpha\,\beta\,\dfrac{1+e_1}{e_1}\\ \dfrac{1}{e_1}=-1-\dfrac{\theta_0}{a\,b\,\alpha\,\beta}\\ e_1=-\dfrac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,b\,\alpha\,\beta}\end{cases}\begin{cases}\varepsilon=-1\quad\zeta=0\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=b\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b}\\ a\left(\beta-e_1\right)\left(\alpha-e_1\right)+e_1\left(\gamma-1-e_1\right)=0\end{cases}\\ \varepsilon=0\quad\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=a\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{a}\\ b\left(\beta-e_1\right)\left(\alpha-e_1\right)+e_1\left(\gamma-1-e_1\right)=0\end{cases}\end{cases}$$

En exprimant e_1 en fonction de ϑ_0 , ce paramètre devient racine d'un polynôme du second degré, comme suit :

$$\sigma_0=-a\Rightarrow\delta+\varepsilon=-1\Rightarrow e_1=-\frac{a\,\alpha\,\beta}{a\,\alpha\,\beta+\theta_0}\quad\begin{cases}\delta=-1\quad\varepsilon=0\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=a\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{a}\\ \theta_0^{\,2}+a\,\theta_0\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta-b\left(\gamma-1\right)\right)+a^2\alpha\,\beta\left(\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-b\,\gamma\right)=0\end{cases}\\ \delta=0\quad\varepsilon=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0\\ \theta_0^{\,2}+\theta_0\left(a\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)-b\left(\gamma-1\right)\right)+a\,\alpha\,\beta\left(\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-b\,\gamma\right)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$\sigma_0=-b\Rightarrow\delta+\zeta=-1\Rightarrow e_1=-\frac{b\,\alpha\,\beta}{b\,\alpha\,\beta+\theta_0}\quad\begin{cases}\delta=-1\quad\zeta=0\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=b\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b}\\ \theta_0^{\,2}+b\,\theta_0\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta-a\left(\gamma-1\right)\right)+b^2\alpha\,\beta\left(\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-a\,\gamma\right)=0\end{cases}\\ \delta=0\quad\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0\\ \theta_0^{\,2}+\theta_0\left(b\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta\right)-a\left(\gamma-1\right)\right)+b\,\alpha\,\beta\left(\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-a\,\gamma\right)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$\sigma_0=-a\,b\Rightarrow\varepsilon+\zeta=-1\Rightarrow e_1=-\frac{a\,b\,\alpha\,\beta}{a\,b\,\alpha\,\beta+\theta_0}\quad\begin{cases}\varepsilon=-1\quad\zeta=0\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=b\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{b}\\ \theta_0^{\,2}+b\,\theta_0\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta+1-\gamma\right)+a\,b^2\alpha\,\beta\left(a\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-\gamma\right)=0\end{cases}\\ \varepsilon=0\quad\zeta=-1\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=a\,\alpha\,\beta-\dfrac{\theta_0}{a}\\ \theta_0^{\,2}+a\,\theta_0\left(\alpha+\beta+2\,\alpha\,\beta+1-\gamma\right)+a^2b\,\alpha\,\beta\left(b\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\right)-\gamma\right)=0\end{cases}\end{cases}$$

A propos de la condition supplémentaire $\varepsilon(\varepsilon+1)=0$ *,* $\delta(\delta+1)=0$ *ou* $\zeta(\zeta+1)=0$ *commençons par le premier cas* $\sigma_0=-a$ *, l'équation algébrique* $T_3=0$ *permet de déterminer facilement la valeur de* ϑ_1 *en fonction* ϑ_0 *(en effet l'équation* T_3 *est toujours linéaire en* ϑ_1*) . L'annulation de* $T_0+T_1+T_2=0$ *conduit à ce que* $\theta_0=-a\,\alpha\,\beta\frac{1+e_1}{e_1}$ *, soit encore :* $e_1=-\frac{a\,\alpha\,\beta}{a\,\alpha\,\beta+\theta_0}$*. Cette valeur injectée dans les trois expressions* T_0 *,*T_1 *,*T_2 *puis en factorisant ces dernières et ne retenant que le numérateur produisent chacune un polynôme en* ϑ_0 *de degré 3 maximum.*

Tout d'abord faisons dépendre explicitement les trois expressions algébriques T_0 *,*T_1 *,*T_2 *du paramètre ε, et remarquons que ces expressions algébriques* T_l *se factorisent toujours sous la forme :*

$$T_l(\varepsilon)=(\varepsilon+1)T_l(\varepsilon=0)-\varepsilon\,T_l(\varepsilon=-1)$$

Pour que ces expressions algébriques s'annulent toutes trois simultanément, il est nécessaire que les deux situations suivantes se produisent l'une ou l'autre :

$$\begin{cases}\varepsilon+1=0 \quad et \quad T_l(\varepsilon=-1)=0\\ ou\\ \varepsilon=0 \quad et \quad T_l(\varepsilon=0)=0\end{cases}$$

Il se trouve que les expressions $T_l(\varepsilon=0)$ *ou* $T_l(\varepsilon=-1)$ *ont toute un polynôme commun diviseur en* ϑ_0 *de degré 2. Elles s'écrivent ainsi:*

$$T_l(\varepsilon=0)=A_lP_2(\varepsilon=0,\vartheta_0) \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=2}A_l=0$$
$$T_l(\varepsilon=-1)=B_lP_2(\varepsilon=-1,\vartheta_0) \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=2}B_l=0$$

Il suffit donc dans chaque cas que le polynôme commun s'annule ce qui donne la valeur de ϑ_0 *comme racine d'un polynôme de degré 2. On en conclut la situation suivante qui devient possible à ces conditions :*

$$\begin{cases}\varepsilon+1=0 \quad et \quad P_2(\varepsilon=-1,\vartheta_0)=0\\ ou\\ \varepsilon=0 \quad et \quad P_2(\varepsilon=0,\vartheta_0)=0\end{cases}$$

Pour le second cas $\sigma_0=-b$ *on fait dépendre les équations algébriques du paramètre δ et il vient avec le même type de factorisation* $\delta(\delta+1)=0$ *et pour le troisième cas* $\sigma_0=-a\,b$ *, on fait dépendre les équations algébriques du paramètre ζ la condition s'en suit :* $\zeta(\zeta+1)=0$*.*

Prenons maintenant en exemple la troisième valeur N=2 :

Les trois valeurs de σ₀ sont :

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \quad et \quad \sigma = -\dfrac{\sigma_0}{a\,b} = \dfrac{1}{b} \Rightarrow \delta + \varepsilon = -2 \\ \sigma_0 = -b \quad et \quad \sigma = -\dfrac{\sigma_0}{a\,b} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow \delta + \zeta = -2 \\ \sigma_0 = -a\,b \quad et \quad \sigma = -\dfrac{\sigma_0}{a\,b} = 1 \Rightarrow \varepsilon + \zeta = -2 \end{cases}$$

Celles de ϑ_0 sont :

$$\begin{cases} \sigma_0 = -a \Rightarrow \theta_0 = -a\,\alpha\,\beta \times \dfrac{(1+e_1)(1+e_2)}{e_1 e_2} = -a\,\alpha\,\beta \times \dfrac{1+s_1+s_2}{s_2} \Rightarrow s_1 = -\dfrac{a\,\alpha\,\beta + s_2(\theta_0 + a\,\alpha\,\beta)}{a\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0 = -b \Rightarrow \theta_0 = -b\,\alpha\,\beta \times \dfrac{(1+e_1)(1+e_2)}{e_1 e_2} = -b\,\alpha\,\beta \times \dfrac{1+s_1+s_2}{s_2} \Rightarrow s_1 = -\dfrac{b\,\alpha\,\beta + s_2(\theta_0 + b\,\alpha\,\beta)}{b\,\alpha\,\beta} \\ \sigma_0 = -a\,b \Rightarrow \theta_0 = -a\,b\,\alpha\,\beta \times \dfrac{(1+e_1)(1+e_2)}{e_1 e_2} = -a\,b\,\alpha\,\beta \times \dfrac{1+s_1+s_2}{s_2} \Rightarrow s_1 = -\dfrac{a\,b\,\alpha\,\beta + s_2(\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta)}{a\,b\,\alpha\,\beta} \end{cases}$$

Rappelons que si l'un des paramètres suivant s'annule, il y a les relations linéaires suivantes entre ϑ_0 et ϑ_1 :

$$\begin{cases} \delta = 0 \rightarrow \theta_1 = \alpha\,\beta - \theta_0 \\ \varepsilon = 0 \rightarrow \theta_1 = a\alpha\,\beta - \dfrac{\theta_0}{a} \\ \zeta = 0 \rightarrow \theta_1 = b\alpha\,\beta - \dfrac{\theta_0}{b} \end{cases}$$

Les solutions hypergéométriques généralisées les plus simples sont celles correspondantes à une fonction de Heun, à savoir :

Cas $\sigma_0 = -a \Rightarrow \delta + \varepsilon = -2 \qquad \varepsilon = 0 \qquad \delta = -2$

$$\sigma_0 = -a \qquad \varepsilon = 0 \qquad \delta = -2$$
$$\theta_1 = a\alpha\,\beta - \frac{\theta_0}{a} \qquad s_1 = -\frac{a\,\alpha\,\beta + s_2\left(\theta_0 + a\,\alpha\,\beta\right)}{a\,\alpha\,\beta} \qquad s_2 = \frac{D\,\theta_0 + E}{F\,\theta_0^{\,2} + G\,\theta_0 + H}$$
$$\theta_0^{\,3} + A\,\theta_0^{\,2} + B\,\theta_0 + C = 0$$
$$A = a\left(1 + 3\beta + 3\alpha(1+\beta) + b(4 - 3\gamma)\right)$$
$$B = a^2\left(2\beta(1+\beta) + 4b(\alpha + \beta + \alpha\,\beta) + \alpha^2(2 + 3\beta(2+\beta)) + 2\alpha(1 + \beta(5 + 3\beta)) + 2b^2(\gamma - 1)(\gamma - 2) - 2b\gamma(2\beta + \alpha(2 + 3\beta))\right)$$
$$C = a^3\alpha\,\beta\left((1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta) - b\gamma(4 + 2b + 4\alpha + 4\beta + 3\alpha\,\beta) + 2b^2\gamma^2\right)$$
$$D = -2a\alpha\,\beta\left(a(\alpha - 2)(\beta - 2) + 3b(\gamma - 2)\right)$$
$$E = -2a^2\alpha\,\beta\left(a(\alpha - 2)(\beta - 2)(1 + \alpha + \beta - 2b(\gamma - 1)) + b(\gamma - 2)(4(1 + \alpha + \beta) + \alpha\,\beta - 6b(\gamma - 1))\right)$$
$$F = a(\alpha - 2)(\beta - 2) + 2b(\gamma - 2)$$
$$G = a\left(a(\alpha - 2)(\beta - 2)(1 + \alpha + \beta + 2\alpha\,\beta - b\gamma) - 2b(\gamma - 2)(b(\gamma + 1) - 2 - \alpha - \beta - 2\alpha\,\beta)\right)$$
$$H = a^2\alpha\,\beta\left(a(\alpha - 2)(\beta - 2)(3 + \alpha + \beta + \alpha\,\beta - b(\gamma + 2)) - 2b(\gamma - 2)(b(\gamma + 3) - 4 - \alpha - \beta - \alpha\,\beta)\right)$$
$$s_1 = e_1 + e_2 \quad s_2 = e_1 e_2 \Rightarrow e_1 \quad \textit{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0 \qquad e_2 = \frac{s_2}{e_1} \quad \textit{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0$$
$$y(x) = {}_4F_3\left(\alpha, \beta, 1 + e_1, 1 + e_2\,;\, \gamma, e_1, e_2\,;\, \frac{x}{b}\right)$$

Cas $\sigma_0 = -a \Rightarrow \delta + \varepsilon = -2 \qquad \varepsilon = -2 \qquad \delta = 0$

$$\sigma_0 = -a \qquad \varepsilon = -2 \qquad \delta = 0$$
$$\theta_1 = \alpha\,\beta - \theta_0 \qquad s_1 = -\frac{a\,\alpha\,\beta + s_2\left(\theta_0 + a\,\alpha\,\beta\right)}{a\,\alpha\,\beta} \qquad s_2 = \frac{D\,\theta_0 + E}{F\,\theta_0^{\,2} + G\,\theta_0 + H}$$
$$\theta_0^{\,3} + A\,\theta_0^{\,2} + B\,\theta_0 + C = 0$$
$$A = a + 3a\beta + 3a\alpha(1+\beta) + b(4 - 3\gamma)$$
$$B = 4ab(\alpha + \beta + \alpha\,\beta) + a^2\left(2\beta(1+\beta) + \alpha^2(2 + 3\beta(2+\beta)) + 2\alpha(1 + \beta(5 + 3\beta))\right) + 2b^2(\gamma - 1)(\gamma - 2) - 2ab(2\beta + \alpha(2 + 3\beta))$$
$$C = a\alpha\,\beta\left(a^2(1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta) - ab\gamma(4 + 4\alpha + 4\beta + 3\alpha\,\beta) + 2b^2\gamma(\gamma - 1)\right)$$
$$D = -2a\alpha\,\beta\left((\alpha - 2)(\beta - 2) + 3b(\gamma - 2)\right)$$
$$E = -2a\alpha\,\beta\left(a((\alpha - 2)(\beta - 2)(1 + \alpha + \beta) + b(\gamma - 2)(4 + 4\alpha + 4\beta + \alpha\,\beta)) - 2b(\gamma - 1)((\alpha - 2)(\beta - 2) + 3b(\gamma - 2))\right)$$
$$F = (\alpha - 2)(\beta - 2) + 2b(\gamma - 2)$$
$$G = a(\alpha - 2)(\beta - 2)(1 + \alpha + \beta + 2\alpha\,\beta) + 2ab(\gamma - 2)(2 + \alpha + \beta + 2\alpha\,\beta) - b\gamma(\alpha - 2)(\beta - 2) - 2b^2(\gamma - 2)(\gamma + 1)$$
$$H = a\alpha\,\beta\left(a((\alpha - 2)(\beta - 2)(3 + \alpha + \beta + \alpha\,\beta) + 2b(\gamma - 2)(4 + \alpha + \beta + \alpha\,\beta)) - b((\alpha - 2)(\beta - 2)(\gamma + 2) + 2b(\gamma - 2)(\gamma + 3))\right)$$
$$s_1 = e_1 + e_2 \quad s_2 = e_1 e_2 \Rightarrow e_1 \quad \textit{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0 \qquad e_2 = \frac{s_2}{e_1} \quad \textit{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0$$
$$y(x) = {}_4F_3\left(\alpha, \beta, 1 + e_1, 1 + e_2\,;\, \gamma, e_1, e_2\,;\, \frac{x}{b}\right)$$

Cas $\sigma_0=-b\Rightarrow\delta+\zeta=-2\quad\delta=0\quad\zeta=-2$

$$\sigma_0=-b\qquad\delta=0\qquad\zeta=-2$$
$$\theta_1=\alpha\,\beta-\theta_0\qquad s_1=-\frac{b\,\alpha\,\beta+s_2(\theta_0+b\,\alpha\,\beta)}{b\,\alpha\,\beta}\qquad s_2=\frac{D\,\theta_0+E}{F\,\theta_0^{\;2}+G\,\theta_0+H}$$
$$\theta_0^{\;3}+A\,\theta_0^{\;2}+B\,\theta_0+C=0$$
$$A=b+3b\beta+3b\alpha(1+\beta)+a(4-3\gamma)$$
$$B=4ab(\alpha+\beta+\alpha\,\beta)+b^2\left(2\beta(1+\beta)+\alpha^2(2+3\beta(2+\beta))+2\alpha(1+\beta(5+3\beta))\right)+2a^2(\gamma-1)(\gamma-2)-2ab(2\beta+\alpha(2+3\beta))$$
$$C=b\alpha\,\beta\left(b^2(1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta)-ab\gamma(4+4\alpha+4\beta+3\alpha\,\beta)+2a^2\gamma(\gamma-1)\right)$$
$$D=-2b\alpha\,\beta((\alpha-2)(\beta-2)+3a(\gamma-2))$$
$$E=-2b\alpha\,\beta(b((\alpha-2)(\beta-2)(1+\alpha+\beta)+a(\gamma-2)(4+4\alpha+4\beta+\alpha\,\beta))-2a(\gamma-1)((\alpha-2)(\beta-2)+3a(\gamma-2)))$$
$$F=(\alpha-2)(\beta-2)+2a(\gamma-2)$$
$$G=b(\alpha-2)(\beta-2)(1+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta)+2ab(\gamma-2)(2+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta)-a\gamma(\alpha-2)(\beta-2)-2a^2(\gamma-2)(\gamma+1)$$
$$H=b\alpha\,\beta(b((\alpha-2)(\beta-2)(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta)+2a(\gamma-2)(4+\alpha+\beta+\alpha\,\beta))-a((\alpha-2)(\beta-2)(\gamma+2)+2a(\gamma-2)(\gamma+3)))$$
$$s_1=e_1+e_2\quad s_2=e_1e_2\Rightarrow e_1\quad \textit{racine de}\quad x^2-s_1x+s_2=0\qquad e_2=\frac{s_2}{e_1}\quad \textit{racine de}\quad x^2-s_1x+s_2=0$$
$$y(x)={}_4F_3\left(\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\;;\gamma,e_1,e_2\;;\frac{x}{a}\right)$$

Cas $\sigma_0=-b\Rightarrow\delta+\zeta=-2\quad\delta=-2\quad\zeta=0$

$$\sigma_0=-b\qquad\delta=-2\qquad\zeta=0$$
$$\theta_1=b\,\alpha\,\beta-\frac{\theta_0}{b}\qquad s_1=-\frac{b\,\alpha\,\beta+s_2(\theta_0+b\,\alpha\,\beta)}{b\,\alpha\,\beta}\qquad s_2=\frac{D\,\theta_0+E}{F\,\theta_0^{\;2}+G\,\theta_0+H}$$
$$\theta_0^{\;3}+A\,\theta_0^{\;2}+B\,\theta_0+C=0$$
$$A=b\,(1+3\beta+3\alpha(1+\beta)+a(4-3\gamma))$$
$$B=b^2\left(2\beta(1+\beta)+4a(\alpha+\beta+\alpha\,\beta)+\alpha^2(2+3\beta(2+\beta))+2\alpha(1+\beta(5+3\beta))+2a^2(\gamma-1)(\gamma-2)-2a\gamma(2\beta+\alpha(2+3\beta))\right)$$
$$C=b^3\alpha\,\beta\left((1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta)-a\gamma(4+2a+4\alpha+4\beta+3\alpha\,\beta)+2a^2\gamma^2\right)$$
$$D=-2b\alpha\,\beta(b(\alpha-2)(\beta-2)+3a(\gamma-2))$$
$$E=-2b^2\alpha\,\beta(b(\alpha-2)(\beta-2)(1+\alpha+\beta-2a(\gamma-1))+a(\gamma-2)(4(1+\alpha+\beta)+\alpha\,\beta-6a(\gamma-1)))$$
$$F=b(\alpha-2)(\beta-2)+2a(\gamma-2)$$
$$G=b(b(\alpha-2)(\beta-2)(1+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta-a\gamma)-2a(\gamma-2)(a(\gamma+1)-2-\alpha-\beta-2\alpha\,\beta))$$
$$H=b^2\alpha\,\beta(b(\alpha-2)(\beta-2)(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta-a(\gamma+2))-2a(\gamma-2)(a(\gamma+3)-4-\alpha-\beta-\alpha\,\beta))$$
$$s_1=e_1+e_2\quad s_2=e_1e_2\Rightarrow e_1\quad \textit{racine de}\quad x^2-s_1x+s_2=0\qquad e_2=\frac{s_2}{e_1}\quad \textit{racine de}\quad x^2-s_1x+s_2=0$$
$$y(x)={}_4F_3\left(\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\;;\gamma,e_1,e_2\;;\frac{x}{a}\right)$$

Cas $\sigma_0 = -a\,b \Rightarrow \varepsilon + \zeta = -2 \qquad \varepsilon = -2 \qquad \zeta = 0$

$$\sigma_0 = -a\,b \qquad \varepsilon = -2 \qquad \zeta = 0$$
$$\theta_1 = b\,\alpha\,\beta - \frac{\theta_0}{b} \qquad s_1 = -\frac{a\,b\,\alpha\,\beta + s_2(\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta)}{a\,b\,\alpha\,\beta} \qquad s_2 = \frac{D\,\theta_0 + E}{F\,\theta_0^{\,2} + G\,\theta_0 + H}$$
$$\theta_0^{\,3} + A\,\theta_0^{\,2} + B\,\theta_0 + C = 0$$
$$A = b(4 + a + 3a\beta + 3a\alpha(1+\beta) - 3\gamma)$$
$$B = b^2\left(4 + a(2\beta(1 + a(1+\beta)) + a\alpha^2(2 + 3\beta(2+\beta)) + 2\alpha(a + 2(1+\beta) + a\beta(5+3\beta))) - 6\gamma - 2a\gamma(2\beta + \alpha(2+3\beta)) + 2\gamma^2\right)$$
$$C = ab^3\alpha\,\beta\,\left(a^2(1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta) - a\gamma(4 + 4\alpha + 4\beta + 3\alpha\,\beta) + 2\gamma(\gamma-1)\right)$$
$$D = -2ab\alpha\,\beta(b(\alpha-2)(\beta-2) + 3(\gamma-2))$$
$$E = -2ab^2\alpha\,\beta(ab(\alpha-2)(\beta-2)(1+\alpha+\beta) + a(\gamma-2)(4(1+\alpha+\beta) + \alpha\,\beta) - 2b(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-1) - 6(\gamma-1)(\gamma-2))$$
$$F = b(\alpha-2)(\beta-2) + 2(\gamma-2)$$
$$G = b(4 + b(\alpha-2)(\beta-2)(a(1+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - \gamma) + 2a(\gamma-2)(2+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - 2\gamma(\gamma-1))$$
$$H = ab^2\alpha\,\beta(b(\alpha-2)(\beta-2)(a(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta) - \gamma - 2) + 2a(4+\alpha+\beta+\alpha\,\beta) - 2(\gamma-2)(\gamma+3))$$
$$s_1 = e_1 + e_2 \quad s_2 = e_1 e_2 \Rightarrow e_1 \quad \text{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0 \qquad e_2 = \frac{s_2}{e_1} \quad \text{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0$$
$$y(x) = {}_4F_3(\alpha, \beta, 1+e_1, 1+e_2\,;\, \gamma, e_1, e_2\,;\, x)$$

Cas $\sigma_0 = -a\,b \Rightarrow \varepsilon + \zeta = -2 \qquad \varepsilon = 0 \qquad \zeta = -2$

$$\sigma_0 = -a\,b \qquad \varepsilon = 0 \qquad \zeta = -2$$
$$\theta_1 = a\,\alpha\,\beta - \frac{\theta_0}{a} \qquad s_1 = -\frac{a\,b\,\alpha\,\beta + s_2(\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta)}{a\,b\,\alpha\,\beta} \qquad s_2 = \frac{D\,\theta_0 + E}{F\,\theta_0^{\,2} + G\,\theta_0 + H}$$
$$\theta_0^{\,3} + A\,\theta_0^{\,2} + B\,\theta_0 + C = 0$$
$$A = a(4 + b + 3b\beta + 3b\alpha(1+\beta) - 3\gamma)$$
$$B = a^2\left(4 + b(2\beta(1 + b(1+\beta)) + b\alpha^2(2 + 3\beta(2+\beta)) + 2\alpha(b + 2(1+\beta) + b\beta(5+3\beta))) - 6\gamma - 2b\gamma(2\beta + \alpha(2+3\beta)) + 2\gamma^2\right)$$
$$C = a^3b\alpha\,\beta\,\left(b^2(1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta) - b\gamma(4 + 4\alpha + 4\beta + 3\alpha\,\beta) + 2\gamma(\gamma-1)\right)$$
$$D = -2ab\alpha\,\beta(a(\alpha-2)(\beta-2) + 3(\gamma-2))$$
$$E = -2a^2b\alpha\,\beta(a(\alpha-2)(\beta-2)(b(1+\alpha+\beta) - 2(\gamma-1)) + b(\gamma-2)(4(1+\alpha+\beta) + \alpha\,\beta) - 6(\gamma-1)(\gamma-2))$$
$$F = a(\alpha-2)(\beta-2) + 2(\gamma-2)$$
$$G = a(4 + a(\alpha-2)(\beta-2)(b(1+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - \gamma) + 2b(\gamma-2)(2+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - 2\gamma(\gamma-1))$$
$$a(4 + a(\alpha-2)(\beta-2)(b(1+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - \gamma) + 2b(\gamma-2)(2+\alpha+\beta+2\alpha\,\beta) - 2\gamma(\gamma-1))$$
$$H = a^2b\alpha\,\beta(a(\alpha-2)(\beta-2)(b(3+\alpha+\beta+\alpha\,\beta) - \gamma - 2) + 2b(4+\alpha+\beta+\alpha\,\beta) - 2(\gamma-2)(\gamma+3))$$
$$s_1 = e_1 + e_2 \quad s_2 = e_1 e_2 \Rightarrow e_1 \quad \text{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0 \qquad e_2 = \frac{s_2}{e_1} \quad \text{racine de} \quad x^2 - s_1 x + s_2 = 0$$
$$y(x) = {}_4F_3(\alpha, \beta, 1+e_1, 1+e_2\,;\, \gamma, e_1, e_2\,;\, x)$$

Les autres solutions hypergéométriques généralisées sont plus complexes à déterminer, à savoir :

Cas N=2 et $\sigma_0 = -a \Rightarrow \delta + \varepsilon = -2 \qquad \varepsilon = \delta = -1 \rightarrow \sigma = \frac{1}{b}$

Pour N=2, il y a un système de 5 équations linéaires en s_1 et s_2. En posant formellement $s_0 = -\frac{\vartheta_0 s_2 + a\,\alpha\,\beta(s_1 + s_2)}{a\,\alpha\,\beta}$*, sachant que s_0=1 on obtient un système de 5 équations linéaires homogènes en s_1 et s_2 de la forme :*

$$\begin{cases} T_1 = 0 \Leftrightarrow T_{1,1}s_1 + T_{1,2}s_2 = 0 \\ T_2 = 0 \Leftrightarrow T_{2,1}s_1 + T_{2,2}s_2 = 0 \\ T_3 = 0 \Leftrightarrow T_{3,1}s_1 + T_{3,2}s_2 = 0 \\ T_4 = 0 \Leftrightarrow T_{4,1}s_1 + T_{4,2}s_2 = 0 \\ T_5 = 0 \Leftrightarrow T_{5,1}s_1 + T_{5,2}s_2 = 0 \end{cases} \qquad avec \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 0$$

où chacun des coefficients est de la forme :

$$\begin{cases} T_{i,1} = a_{i,1} + b_{i,1}\,\vartheta_0 + c_{i,1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,2} = a_{i,2} + \vartheta_0(b_{i,2} + c_{i,2}\vartheta_0 + d_{i,2}\vartheta_1) + e_{i,2}\vartheta_1 \end{cases}$$

, notons les déterminants construits deux à deux sur ce système d'équation linéaires et devant être nuls : $D_{i,j} = \begin{bmatrix} T_{i,1} & T_{i,2} \\ T_{j,1} & T_{j,2} \end{bmatrix} = T_{i,1}T_{j,2} - T_{i,2}T_{j,1} = 0$ *. Comme indiqué plus haut, il convient de former les 10 déterminants suivants :* $D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}, D_{1,5}, D_{2,3}, D_{2,4}, D_{2,5}, D_{3,4}, D_{3,5}, D_{4,5}$ *. Il convient de s'assurer qu'ils sont tous simultanément nuls. Or chacun de ces déterminants est de degré 3 en ϑ_0 et de degré 2 en ϑ_1 . En prenant deux quelconques de ces 10 déterminants (45 choix possibles), on réduit l'expression en un polynôme de degré 1 en ϑ_1 . Cela revient à pouvoir exprimer ϑ_1 comme une forme rationnelle entre deux polynômes en ϑ_0 :*

$$\vartheta_1 = \frac{P_4(\vartheta_0)}{P_3(\vartheta_0)}$$

Cette relation est alors injectée dans chacun de ces 10 déterminants et en recherchant entre eux le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit en pratique soit à un polynôme multiple de deux polynômes de degré deux en ϑ_0 devant s'annuler pour certaines valeurs des paramètres mais plus généralement un polynôme de degré 4.

Pour le moment je ne peux illustrer cette construction que pour des valeurs numériques précises des paramètres en jeu. Dans cette optique j'ai volontairement simplifié le jeu des paramètres, notamment $\zeta=\gamma \quad et \quad \alpha=\beta \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma-\frac{3}{2}$*, cela entraîne une contrainte forte que* $\gamma \neq \frac{3}{2}$ *sans quoi* $\alpha=\beta=0$*, soit que la solution recherchée* $\alpha=\beta=0 \quad \gamma=\zeta=\frac{3}{2} \quad \delta=\varepsilon=-1 \rightarrow y(z)={}_4F_3\left(\{0,0,1+e_1,1+e_2\};\{\gamma,e_1,e_2\};\frac{z}{b}\right)\equiv 1$ *devient triviale et ne vérifie évidemment pas l'équation différentielle de départ. De même plus généralement il convient que la solution ne se réduise pas à une fonction hyper-géométrique* ${}_3F_2$*, ou même* ${}_2F_1$*, soit que l'intersection des deux groupes de paramètres soit strictement vide :*

$$y(z)={}_4F_3\left(\{\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\};\{\gamma,e_1,e_2\};\frac{z}{b}\right) \rightarrow \{\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\}\cap\{\gamma,e_1,e_2\}=\varnothing$$

Donc en prenant des valeurs numériques précises, comme par exemple $\zeta=\gamma \quad et \quad \alpha=\beta \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma-\frac{3}{2}$*, et pour les points singuliers réguliers a=2 et b=a+1=3, alors le PGCD polynomial* ϑ_0 *devant s'annuler est le suivant :*

$$\begin{gathered}\left(4\vartheta_0^{\,2}+\vartheta_0\left(40-52\gamma+16\gamma^2\right)+1-98\gamma+168\gamma^2-104\gamma^3+16\gamma^4\right)\times\\ \times\left(4\vartheta_0^{\,2}+\vartheta_0\left(24-52\gamma+16\gamma^2\right)+9-138\gamma+208\gamma^2-104\gamma^3+16\gamma^4\right)=0\end{gathered}$$

Lorsque γ=1/2, mais en laissant libre a, l'expression du PGCD se simplifie encore ce qui permet une détermination simple des

valeurs de ϑ_0 *:* $(\vartheta_0-a)\times\left(2\vartheta_0+1+a^2\right)\times\left(4\vartheta_0^{\,2}+2\vartheta_0(a+1)^2-a(a+1)^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\vartheta_0=0 \quad ou \quad \vartheta_0=-\frac{1+a^2}{2} \quad ou\\ \vartheta_0=\frac{-1-a(a+2)\pm(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4}\end{cases}$

Avec ces mêmes valeurs $\zeta=\gamma=\frac{1}{2} \quad et \quad \alpha=\beta=-1$*, les expressions des variables* s_1 *et* s_2 *sont obtenus avec Mathematica comme suit en fonction des valeurs de* ϑ_0 *et* ϑ_1*:*

$$\begin{cases}s_1=\dfrac{2\vartheta_0-1+2\vartheta_1-a\,(6+a-2\vartheta_1)}{2a}\\ s_2=\dfrac{1+4a+a^2-2\vartheta_0-2\vartheta_1\,(1+a)}{2(a+\vartheta_0)}\end{cases}$$

Puis en reportant ces valeurs de ϑ_0 *dans l'expression de* ϑ_1 *(on rappelle qu'il y a 45 choix possibles d'expression de la forme* $\vartheta_1=\frac{P_4(\vartheta_0)}{P_3(\vartheta_0)}$ *, mais en en prenant que 5), par exemple avec la valeur suivante :* $\vartheta_1=\dfrac{a^2(1+a)^2\left(7+16a+7a^2\right)-a\left(1+36a+46a^2+36a^3+a^4\right)\vartheta_0-2(3+a)(1+3a)\left(1+5a+a^2\right)\vartheta_0^{\,2}-24a\,\vartheta_0^{\,3}+24\vartheta_0^{\,4}}{2(1+a)\left(a^2\left(7+8a+7a^2\right)-a\left(1+4a+a^2\right)\vartheta_0-2(3+a)(1+3a)\,\vartheta_0^{\,2}-12\,\vartheta_0^{\,3}\right)}$

Il vient avec Mathematica pour ces valeurs spécifiques de ϑ_0 :

$$\begin{cases} \vartheta_0 = a \;\rightarrow\; \vartheta_1 = 1+a \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a^2}{2a} \;\; et \;\; s_2 = -\dfrac{(a+1)^2}{4a} \\ \vartheta_0 = -\dfrac{1+a^2}{2} \;\rightarrow\; \vartheta_1 = 1+a \;\; et \;\; s_1 = -1 \;\; et \;\; s_2 = 0 \\ \vartheta_0 = \dfrac{-1-a(a+2)-(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\rightarrow\; \vartheta_1 = 1+a+\dfrac{\sqrt{1+6a+a^2}}{2} \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a(a-6)+(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; s_2 = 1 \\ \vartheta_0 = \dfrac{-1-a(a+2)+(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\rightarrow\; \vartheta_1 = 1+a-\dfrac{\sqrt{1+6a+a^2}}{2} \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a(a-6)-(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; s_2 = 1 \end{cases}$$

Or pour le choix de paramètre : $\vartheta_0 = -\dfrac{1+a^2}{2} \;\rightarrow\; \vartheta_1 = 1+a \;\; et \;\; s_1 = -1 \;\; et \;\; s_2 = 0$

cela signifie que $e_1 = -1 \;\; et \;\; e_2 = 0$ *, soit que la fonction hyper-géométrique généralisée est de la forme :*

$$\begin{cases} \alpha = \beta = -1 \;\; \gamma = \dfrac{1}{2} \;\; \delta = \varepsilon = -1 \\ b = a+1 \;\; e_1 = 0 \;\; e_2 = -1 \end{cases} \rightarrow y(z) = {}_4F_3\left(\{\alpha,\beta,0,1\};\{\gamma,0,-1\};\frac{z}{a+1}\right) = {}_2F_1\left(\{1,-1\};\{\gamma\};\frac{z}{a+1}\right) = \sum_{l=0}^{l=+\infty}\frac{(-1)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l}\times\frac{z^l}{(a+1)^l}$$

$$\rightarrow y(z) = \sum_{l=0}^{l=1}\frac{(-1)_l}{\left(\frac{1}{2}\right)_l}\times\frac{z^l}{(a+1)^l} = 1-2\times\frac{z}{a+1}$$

La fonction est donc polynomiale et relativement triviale mais on peut facilement vérifier qu'elle ne respecte pas l'équation fuschienne de départ :

$$y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}+\frac{\zeta}{z-b}\right)y'(z)+\frac{(\alpha\,\beta\,z^2-\theta_1 z-\theta_0)}{z(z-1)(z-a)(z-b)}\,y(z)=0$$

Dans ce cas seules 3 valeurs de ϑ_0 conduisent donc à une solution possible et non triviale, à savoir :

$$\alpha = \beta = -1 \qquad \gamma = \zeta = \frac{1}{2} \qquad \delta = \varepsilon = -1 \qquad b = a+1$$

$$\begin{cases} \vartheta_0 = 0 \;\; et \;\; \vartheta_1 = 1+a \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a^2}{2a} \;\; et \;\; s_2 = -\dfrac{(a+1)^2}{4a} \;\; et \;\; e_1 = \dfrac{1+a^2-\sqrt{1+4a+10a^2+4a^3+a^4}}{4a} \;\; et \;\; e_2 = \dfrac{1+a^2+\sqrt{1+4a+10a^2+4a^3+a^4}}{4a} \\ \vartheta_0 = \dfrac{-1-a(a+2)-(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; \vartheta_1 = 1+a+\dfrac{\sqrt{1+6a+a^2}}{2} \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a(a-6)+(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; s_2 = 1 \\ \vartheta_0 = \dfrac{-1-a(a+2)+(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; \vartheta_1 = 1+a-\dfrac{\sqrt{1+6a+a^2}}{2} \;\; et \;\; s_1 = \dfrac{1+a(a-6)-(a+1)\sqrt{1+6a+a^2}}{4} \;\; et \;\; s_2 = 1 \end{cases}$$

De toute façon ces trois valeurs correspondent également à des solutions polynomiales, la fonction hyper-géométrique étant en effet triviale :

$$\alpha=\beta=-1 \quad \gamma=\frac{1}{2} \quad \delta=\varepsilon=-1 \quad b=a+1$$

$$\rightarrow y(z)={}_4F_3\left(\{\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\};\{\gamma,e_1,e_2\};\frac{z}{a+1}\right)=1+2x\frac{(1+e_1)(1+e_2)}{(a+1)e_1e_2}=1+2x\frac{1+s_1+s_2}{(a+1)s_2}$$

La valeur $\gamma=\zeta=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=\beta=0$ *est à proscrire car elle ne conduit pas une solution hyper-géométrique généralisée du type recherché. Lorsque* $\gamma=\zeta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\beta=-2$*, ce qui conduit une nouvelle fois à une solution polynomiale de degré 2 en z.*

Donc les seules solutions intéressantes et non élémentaire pour ce choix simplifié de $\zeta=\gamma \quad et \quad \alpha=\beta\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma-\frac{3}{2}$*, sont celles pour lesquelles α=β n'est pas un entier négatif, soit que γ ne soit pas un demi entier strictement inférieur à ½. A cette condition il existe alors 4 solutions non triviales et non polynomiales de la forme* $y(z)={}_4F_3\left(\{\alpha,\beta,1+e_1,1+e_2\};\{\gamma,e_1,e_2\};\frac{z}{a+1}\right)$ *.*

Cas N=2 et $\sigma_0 = -b \Rightarrow \delta + \zeta = -2 \quad \delta = \zeta = -1$ ***ou*** $\sigma_0 = -a\,b \Rightarrow \varepsilon + \zeta = -2 \quad \varepsilon = \zeta = -1$

Il y a toujours un système de 5 équations linéaires en s_1 et s_2. En posant formellement :

$$\sigma = \frac{1}{a} \quad et \quad \sigma_0 = -b \rightarrow s_0 = -\frac{\vartheta_0 s_2 + b\,\alpha\,\beta(s_1 + s_2)}{b\,\alpha\,\beta}$$
$$\sigma = 1 \quad et \quad \sigma_0 = -a\,b \rightarrow s_0 = -\frac{\vartheta_0 s_2 + a\,b\,\alpha\,\beta(s_1 + s_2)}{a\,b\,\alpha\,\beta}$$

sachant que $s_0=1$ on obtient un système de 5 équations linéaires homogènes en s_1 et s_2 où chacun des coefficients est de la forme : $\begin{cases} T_{i,1} = a_{i,1} + b_{i,1}\,\vartheta_0 + c_{i,1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,2} = a_{i,2} + \vartheta_0\left(b_{i,2} + c_{i,2}\vartheta_0 + d_{i,2}\vartheta_1\right) + e_{i,2}\vartheta_1 \end{cases}$ *, notons les déterminants construits deux à deux sur ce système d'équation linéaires et devant être nuls :* $D_{i,j} = \begin{bmatrix} T_{i,1} & T_{i,2} \\ T_{j,1} & T_{j,2} \end{bmatrix} = T_{i,1}T_{j,2} - T_{i,2}T_{j,1} = 0$.

Comme indiqué plus haut, il convient de former 10 déterminants et de s'assurer qu'ils sont tous simultanément nuls. Or chacun de ces déterminants est de degré 3 en ϑ_0 et de degré 2 en ϑ_1 donc en prenant deux quelconques de ces 10 déterminants (45 choix possibles), on réduit l'expression en un polynôme de degré 1 en ϑ_1. Cela revient à pouvoir exprimer ϑ_1 comme une forme rationnelle entre deux polynômes en ϑ_0: $\vartheta_1 = \frac{P_4(\vartheta_0)}{Q_3(\vartheta_0)}$ *. Cette relation est alors injectée dans chacun de ces 10 déterminants et en recherchant entre eux le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit à un polynôme de degré 4 dont ϑ_0 doit être une racine. Ainsi la relation entre ϑ_0 et ϑ_1 s'exprime sous la forme* $\vartheta_1 = \frac{\tilde{P}_3(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_3(\vartheta_0)}$ *. En revenant à la « N-1=1 » , soit la première équation linéaire :*

$$T_{0,1}s_1 + T_{0,2}s_2 = 0 \Rightarrow s_2 = -\frac{T_{0,1}}{T_{0,2}}s_1$$

et en substituant la relation suivante $\begin{cases} \sigma_0 = -b \rightarrow s_2 = -\dfrac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + b\,\alpha\,\beta} \times (1 + s_1) \\ \sigma_0 = -a\,b \rightarrow s_2 = -\dfrac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0 + a\,b\,\alpha\,\beta} \times (1 + s_1) \end{cases}$ *on en tire la valeur de s_1 puis s_2, les valeurs recherchées de e_1, e_2 sont racines dans un ordre fixé du polynôme formé à partir des valeurs de s_1,s_2 comme suit :* $-e_1, -e_2 \quad racines\ de \quad z^2 + s_1 z + s_2 = 0$.

Voici un exemple de solution hypergéométrique généralisée qui se présente avec :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{47}{24}=1.95833$ $a[4]=\frac{367}{120}=3.05833$

θ_0 racines de l'équation $\frac{4783333966813}{782757789696}-\frac{21662185643\,\theta_0}{1698693120}+\frac{33773167\,\theta_0^2}{44236800}+\frac{12613\,\theta_0^3}{1920}+\theta_0^4==0$

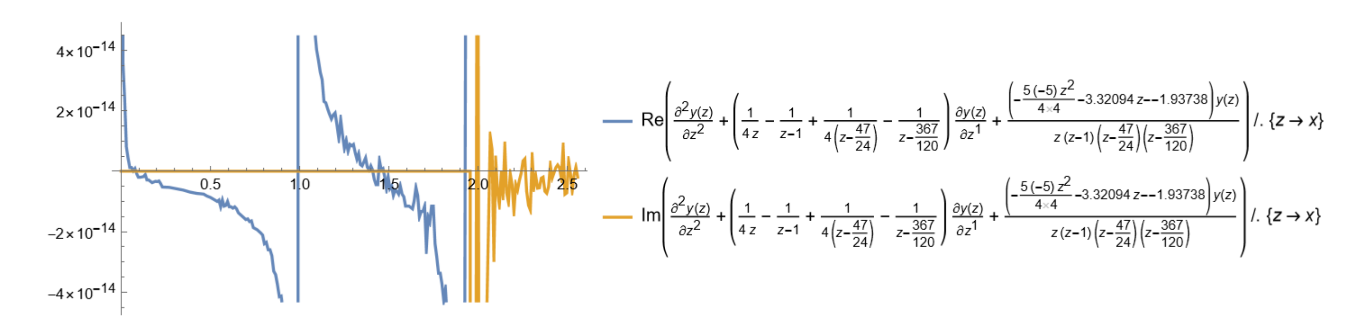
Liste des racines : $\{\theta_0\to-6.07008,\ \theta_0\to-1.93738,\ \theta_0\to0.719094-0.0503332\,i,\ \theta_0\to0.719094+0.0503332\,i\}$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-\frac{1054314175429766219}{12230590464}+\frac{19283749962681857\,\theta_0}{212336640}-\frac{143649065116763\,\theta_0^2}{5529600}-\frac{10634539381\,\theta_0^3}{1440}}{-\frac{550690683865355}{9437184}+\frac{32673724871461\,\theta_0}{663552}+\frac{56010962717\,\theta_0^2}{2880}+1564348\,\theta_0^3}$$

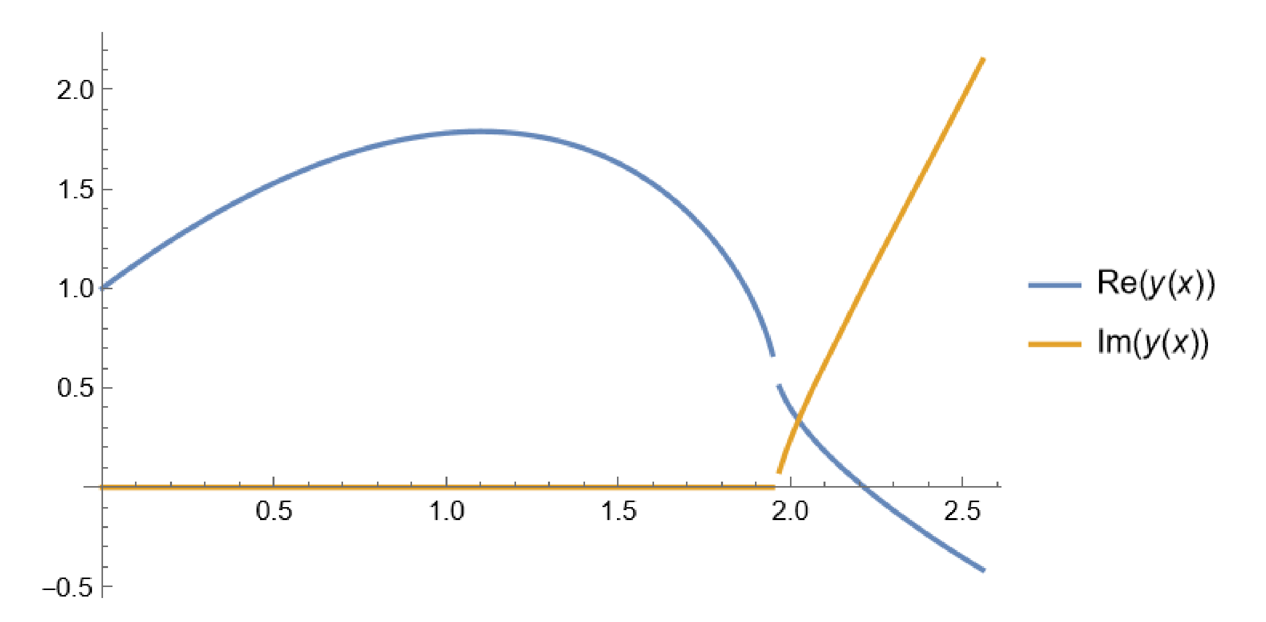
$\gamma=\frac{1}{4}$ $\delta=-1$ $\epsilon=\frac{1}{4}$ $\zeta=-1$ $\alpha=-\frac{5}{4}$ $\beta=-\frac{5}{4}$ $\theta_0=-1.93738$ $\theta_1=3.32094$

$s[1]=-0.887228$ $s[2]=-0.189668$ $e[1]=-1.06527$ $e[2]=0.178046$ $\sigma=\frac{24}{47}=0.510638$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Un autre exemple de solution hypergéométrique généralisée avec :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=1.35 a[4]=2.67

θ_0 racines de l'équation $0.0100045 + 6.83497\,\theta_0 - 5.61847\,\theta_0^2 + 0.52062\,\theta_0^3 + \theta_0^4 == 0$

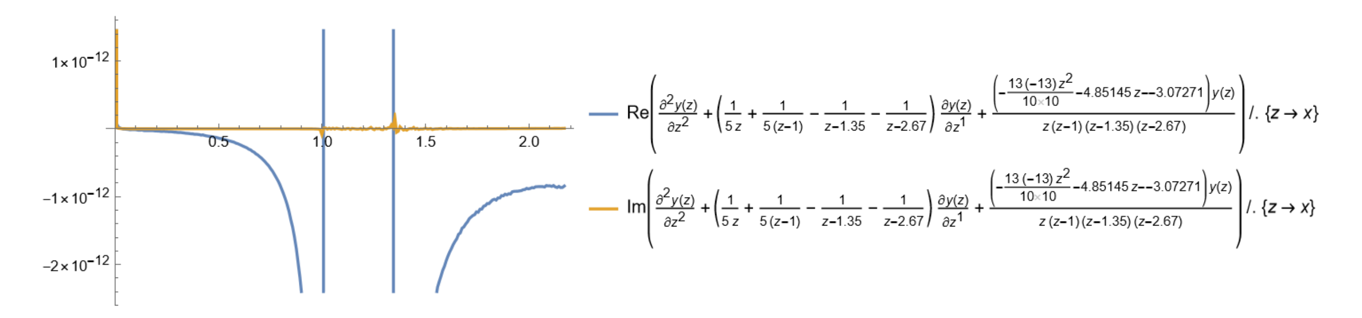
Liste des racines : $\{\theta_0 \to -3.07271,\ \theta_0 \to -0.00146197,\ \theta_0 \to 1.27678 - 0.772612\,i,\ \theta_0 \to 1.27678 + 0.772612\,i\}$

$$\theta_1[\theta_0] = \frac{5.86964\times10^7 + 1.42871\times10^8\,\theta_0 + 5.85905\times10^6\,\theta_0^2 - 1.32155\times10^7\,\theta_0^3}{3.82405\times10^7 + 3.18217\times10^7\,\theta_0 + 1.02031\times10^7\,\theta_0^2 + \frac{533293056\,\theta_0^3}{625}}$$

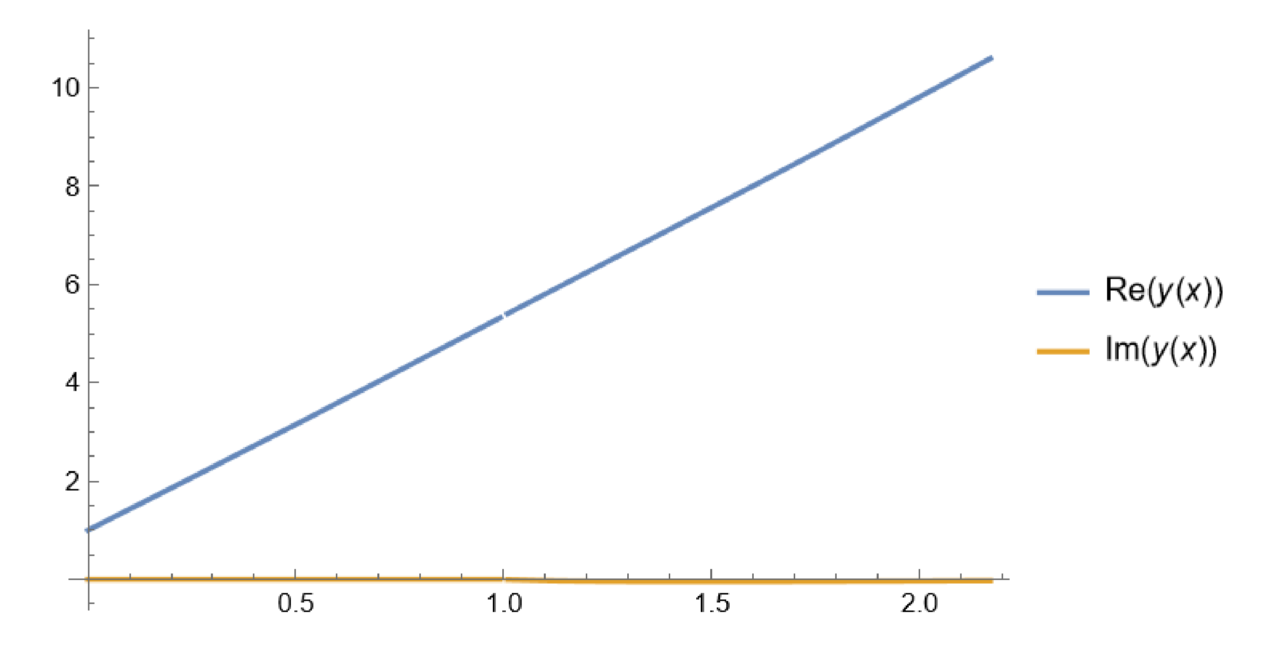
$\gamma=\frac{1}{5}$ $\delta=\frac{1}{5}$ $\epsilon=-1$ $\zeta=-1$ $\alpha=-\frac{13}{10}$ $\beta=-\frac{13}{10}$ $\theta_0=-3.07271$ $\theta_1=4.85145$

s[1]=-5.12294 s[2]=8.31936 e[1]=-2.56147 - 1.32599 i e[2]=-2.56147 + 1.32599 i σ=1

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Cas N=3 et $\sigma_0=-a\Rightarrow\varepsilon+\delta=-3\quad\varepsilon=-2\ \ et\ \ \delta=-1$ ***ou*** $\sigma_0=-b\Rightarrow\delta+\zeta=-3\quad\delta=-2\ \ et\ \ \zeta=-1$ ***ou*** $\sigma_0=-a\,b\Rightarrow\varepsilon+\zeta=-3\quad\varepsilon=-2\ \ et\ \ \zeta=-1$

Nous avons à faire avec un système de 6 équations linéaires en s_1,s_2,s_3. En posant formellement :

$$
\begin{aligned}
&\sigma=\frac{1}{b}\ \ et\ \ \sigma_0=-a\rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_3+a\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3)}{a\,\alpha\,\beta}\\
&\sigma=\frac{1}{a}\ \ et\ \ \sigma_0=-b\rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_3+b\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3)}{b\,\alpha\,\beta}\\
&\sigma=1\ \ et\ \ \sigma_0=-a\,b\rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_3+a\,b\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3)}{a\,b\,\alpha\,\beta}
\end{aligned}
$$

sachant que s_0=1 on obtient un système de 6 équations linéaires homogènes en s_1,s_2,s_3 où chacun des coefficients est de la forme : $\begin{cases}T_{i,1}=a_{i,1}+b_{i,1}\,\vartheta_0+c_{i,1}\,\vartheta_1\\ T_{i,2}=a_{i,2}+\vartheta_0\left(b_{i,2}+c_{i,2}\vartheta_0+d_{i,2}\vartheta_1\right)+e_{i,2}\vartheta_1\end{cases}$ *, notons les déterminants construits trois à trois sur ce système d'équations linéaires et devant être nuls :* $D_{i,j,k}=\begin{bmatrix}T_{i,1}&T_{i,2}&T_{i,3}\\T_{j,1}&T_{j,2}&T_{j,3}\\T_{k,1}&T_{k,2}&T_{k,3}\end{bmatrix}=0$ *. Comme indiqué plus haut, il convient de former 20 déterminants et de s'assurer qu'ils sont tous simultanément nuls. Or chacun de ces déterminants est de degré 3 en ϑ_0 et de degré 2 en ϑ_1 donc en prenant trois quelconques de ces 20 déterminants (1140 choix possibles), on réduit l'expression en un polynôme de degré 1 en ϑ_1. Cela revient à pouvoir exprimer ϑ_1 comme une forme rationnelle entre deux polynômes en ϑ_0 :* $\vartheta_1=\frac{P_7(\vartheta_0)}{Q_6(\vartheta_0)}$ *. Cette relation est alors injectée dans chacun de ces 20 déterminants et en recherchant entre eux le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit à un polynôme de degré 6 dont ϑ_0 doit être une racine. Ainsi la relation entre ϑ_0 et ϑ_1 s'exprime sous la forme* $\vartheta_1=\frac{\tilde{P}_5(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_5(\vartheta_0)}$ *. En revenant au N-1=2 premières équations linéaires :* $\begin{cases}T_{0,1}s_1+T_{0,2}s_2+T_{0,3}s_3=0\\T_{1,1}s_1+T_{1,2}s_2+T_{1,3}s_3=0\end{cases}$ *et en substituant les relations suivantes* $\begin{cases}\sigma_0=-a\rightarrow s_3=-\dfrac{a\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2)\\ \sigma_0=-b\rightarrow s_3=-\dfrac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+b\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2)\\ \sigma_0=-a\,b\rightarrow s_3=-\dfrac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,b\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2)\end{cases}$ *le système des deux équations linéaires n'est plus homogène et permet de déterminer alors les variables s_1,s_2 puis s_3. Les valeurs recherchées de e_1, e_2, e_3 sont racines dans un ordre fixé du polynôme formé à partir des valeurs de s_1,s_2,s_3 comme suit :* $-e_1,-e_2,-e_3\quad racines\ de\quad z^3+s_1z^2+s_2z+s_3=0$.

Le premier exemple de solution hypergéométrique généralisée se présente avec :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{13}{5}=2.6$ $a[4]=\frac{11}{3}=3.66667$

θ_0 racines de l'équation $\frac{12\,282\,368\,720\,902\,651\,904}{308\,990\,478\,515\,625}-\frac{27\,401\,727\,941\,526\,016\,\theta_0}{823\,974\,609\,375}-\frac{17\,962\,469\,364\,112\,\theta_0^2}{3\,955\,078\,125}+\frac{32\,132\,289\,409\,\theta_0^3}{10\,546\,875}+\frac{18\,936\,703\,\theta_0^4}{28\,125}+\frac{17\,191\,\theta_0^5}{375}+\theta_0^6==0$

Liste des racines : $\{\theta_0\to-20.9917,\ \theta_0\to-13.9333,\ \theta_0\to-9.29654,\ \theta_0\to-5.17306,\ \theta_0\to1.20315,\ \theta_0\to2.34881\}$

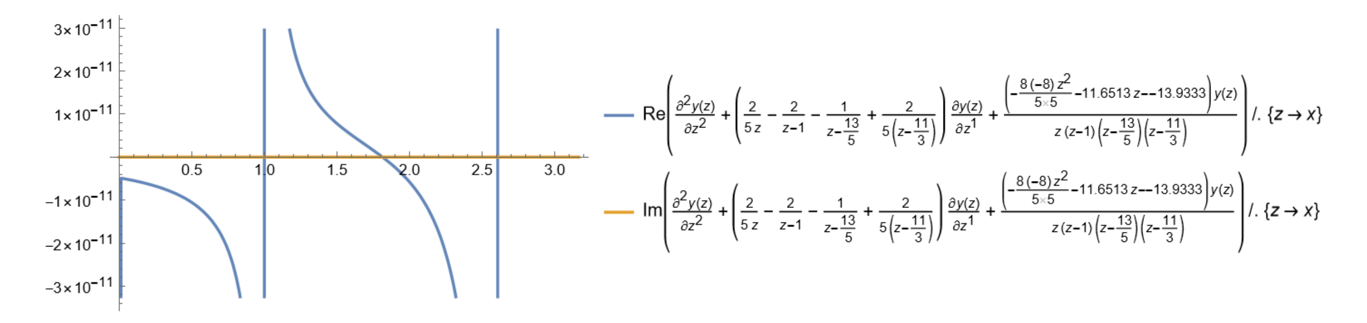
$\theta_1[\theta_0]=$

$$\frac{2\,(423\,412\,760\,120\,092\,432\,059\,695\,104-677\,804\,468\,722\,239\,804\,018\,112\,000\,\theta_0+83\,026\,721\,916\,286\,657\,603\,250\,000\,\theta_0^2+62\,420\,165\,911\,463\,427\,091\,796\,875\,\theta_0^3+5\,268\,473\,004\,172\,356\,445\,312\,500\,\theta_0^4+122\,827\,021\,091\,949\,462\,890\,625\,\theta_0^5)}{20\,625\,(2\,538\,953\,060\,890\,792\,312\,832-7\,021\,646\,706\,894\,671\,945\,600\,\theta_0+1\,023\,444\,370\,618\,244\,412\,500\,\theta_0^2+706\,823\,126\,506\,718\,359\,375\,\theta_0^3+61\,376\,650\,521\,386\,718\,750\,\theta_0^4+1\,473\,068\,792\,724\,609\,375\,\theta_0^5)}$$

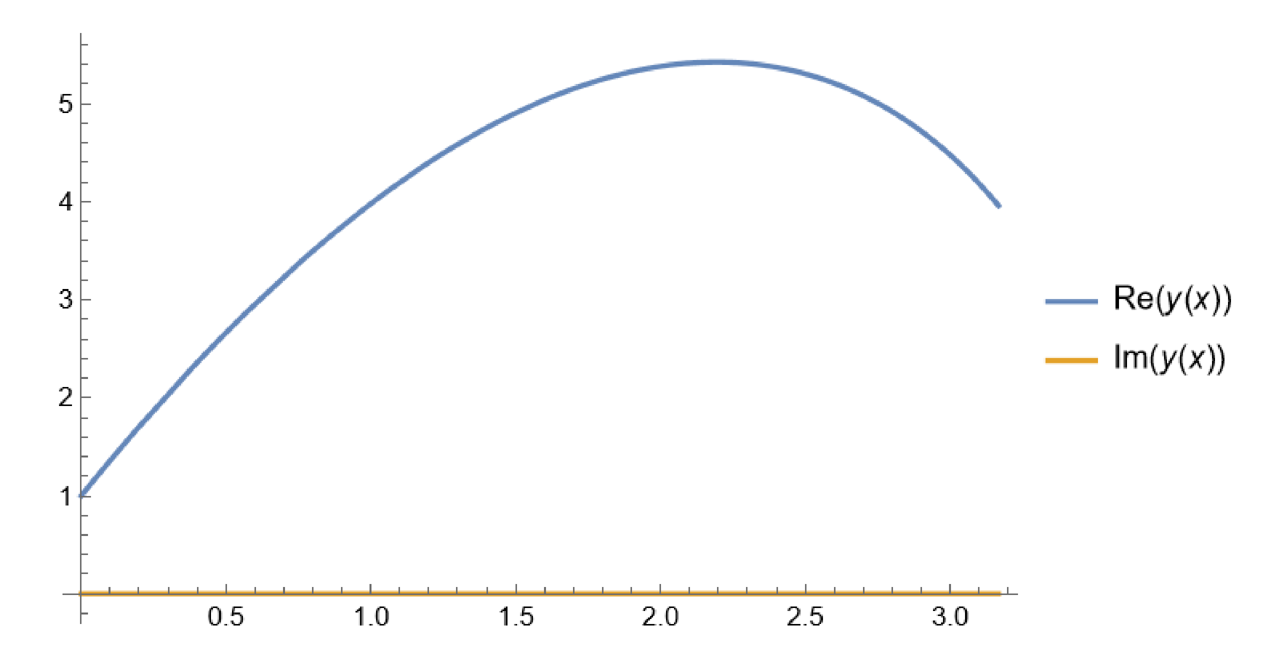
$\gamma=\frac{2}{5}$ $\delta=-2$ $\epsilon=-1$ $\zeta=\frac{2}{5}$ $\alpha=-\frac{8}{5}$ $\beta=-\frac{8}{5}$ $\theta_0=-13.9333$ $\theta_1=11.6513$

$s[1]=-2.30669$ $s[2]=1.19471$ $s[3]=-0.102418$ $e[1]=-0.106685$ $e[2]=-0.6$ $e[3]=-1.6$ $\sigma=\frac{3}{11}=0.272727$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Le deuxième exemple de solution hypergéométrique généralisée se présente avec :

- les paramètres associés :

$\{-1.52478\times 10^{-12},\ 2.33065\times 10^{-15}\}$

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{3}{2}=1.5$ $a[4]=\frac{8}{3}=2.66667$

θ_0 racines de l'équation $\frac{56\,395\,360\,000}{387\,420\,489}-\frac{43\,511\,600\,\theta_0}{4\,782\,969}-\frac{21\,891\,820\,\theta_0^2}{177\,147}-\frac{297\,965\,\theta_0^3}{19\,683}+\frac{8717\,\theta_0^4}{243}+\frac{115\,\theta_0^5}{9}+\theta_0^6==0$

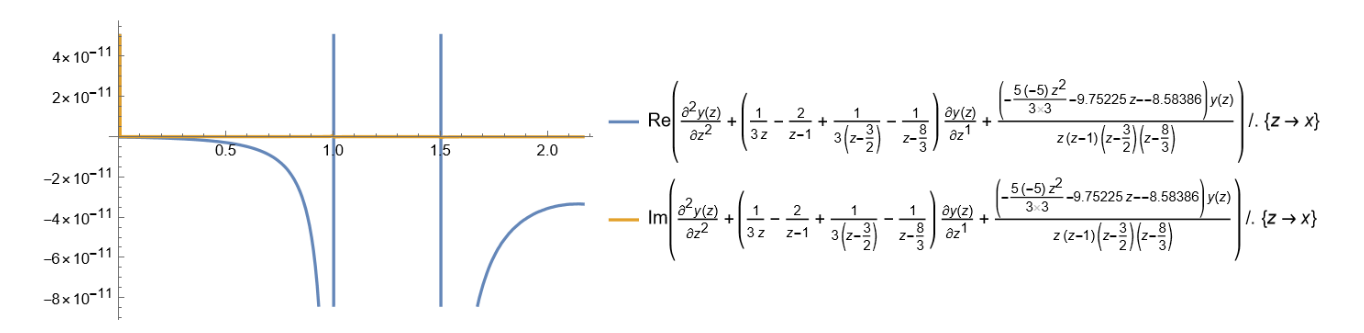
Liste des racines : $\{\theta_0\to-8.58386,\ \theta_0\to-2.99415,\ \theta_0\to-1.81918-0.503625\,i,\ \theta_0\to-1.81918+0.503625\,i,\ \theta_0\to1.2193-0.320772\,i,\ \theta_0\to1.2193+0.320772\,i\}$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{3\,000\,636\,199\,105\,760\,000+54\,226\,978\,426\,318\,957\,200\,\theta_0+9\,017\,704\,684\,392\,157\,980\,\theta_0^2-11\,316\,775\,468\,919\,505\,975\,\theta_0^3+1\,977\,078\,560\,548\,984\,038\,\theta_0^4+386\,918\,529\,724\,018\,665\,\theta_0^5}{243\left(4\,583\,777\,678\,560\,000+52\,282\,170\,114\,526\,800\,\theta_0+9\,850\,665\,366\,482\,220\,\theta_0^2-13\,952\,485\,672\,422\,075\,\theta_0^3-1\,668\,293\,213\,096\,646\,\theta_0^4+489\,283\,379\,793\,\theta_0^5\right)}$$

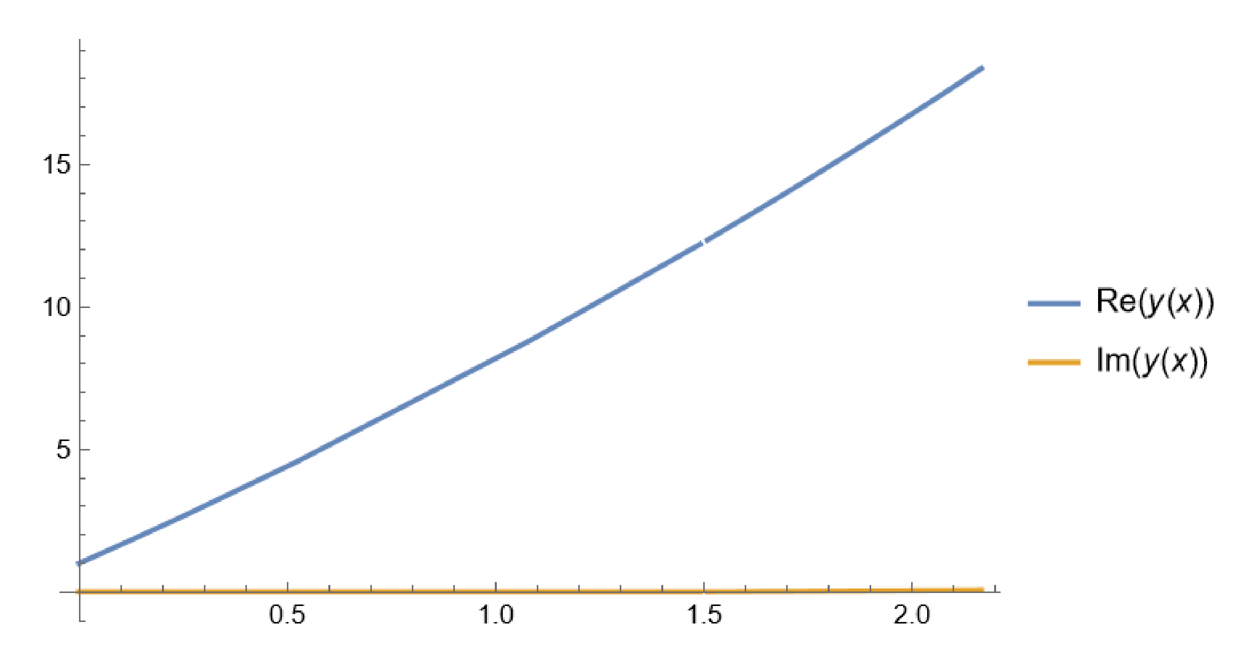
$\gamma=\frac{1}{3}$ $\delta=-2$ $\epsilon=\frac{1}{3}$ $\zeta=-1$ $\alpha=-\frac{5}{3}$ $\beta=-\frac{5}{3}$ $\theta_0=-8.58386$ $\theta_1=9.75225$

$s[1]=-0.727098$ $s[2]=-4.68212$ $s[3]=-27.7622$ $e[1]=1.55409+2.19623\,i$ $e[2]=1.55409-2.19623\,i$ $e[3]=-3.83528$ $\sigma=\frac{2}{3}=0.666667$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Le troisième exemple de solution hypergéométrique généralisée se présente avec :

- les paramètres associés :

$\{1.20792\times10^{-12},\ 0.\}$

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{13}{5}=2.6$ $a[4]=\frac{11}{3}=3.66667$

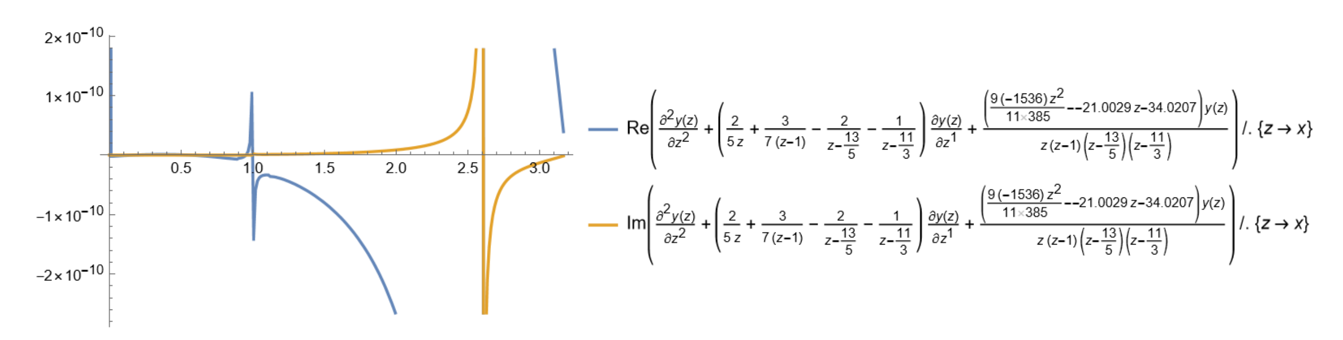
Θ_0 racines de l'équation $\frac{451\,907\,786\,603\,883\,313\,260\,762\,529\,792}{39\,253\,656\,964\,306\,640\,625}-\frac{4\,153\,963\,095\,290\,169\,253\,990\,254\,656\,\Theta_0}{2\,141\,108\,561\,689\,453\,125}+\frac{129\,736\,445\,384\,321\,201\,828\,944\,\Theta_0^2}{1\,112\,264\,187\,890\,625}-\frac{42\,992\,569\,627\,663\,808\,\Theta_0^3}{12\,839\,990\,625}+\frac{328\,963\,734\,856\,\Theta_0^4}{6\,670\,125}-\frac{687\,884\,\Theta_0^5}{1925}+\Theta_0^6==0$

Liste des racines : $\{\Theta_0\to12.6868,\ \Theta_0\to34.0207,\ \Theta_0\to40.181,\ \Theta_0\to70.8724,\ \Theta_0\to75.4653,\ \Theta_0\to124.116\}$

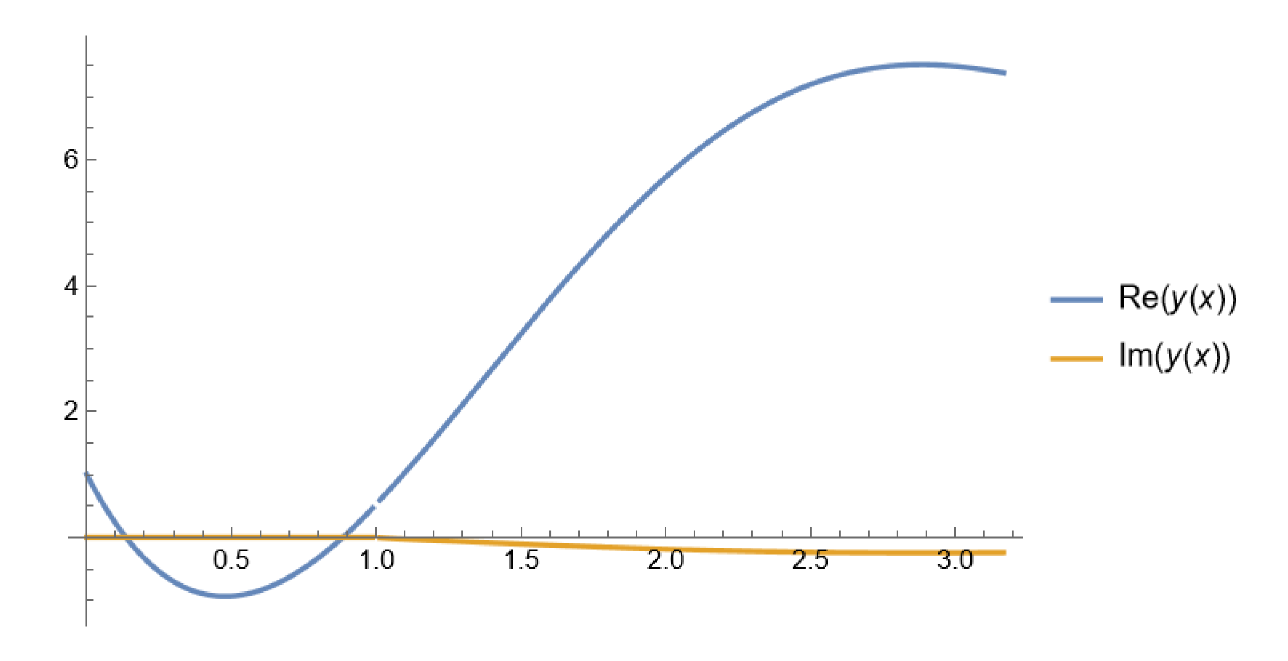
$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{31\,142\,717\,459\,247\,593\,675\,580\,090\,025\,119\,478\,854\,303\,744-3\,308\,851\,567\,941\,193\,657\,171\,605\,609\,584\,337\,838\,612\,320\,\Theta_0+129\,161\,155\,910\,952\,810\,748\,311\,386\,333\,502\,792\,368\,000\,\Theta_0^2-2\,329\,215\,891\,716\,448\,884\,093\,385\,743\,071\,047\,162\,500\,\Theta_0^3+19\,493\,172\,458\,324\,297\,802\,549\,774\,440\,468\,437\,500\,\Theta_0^4-60\,425\,991\,648\,031\,223\,656\,497\,071\,091\,796\,875\,\Theta_0^5}{232\,925\left(-7\,922\,192\,064\,743\,225\,884\,383\,636\,981\,132\,005\,376+795\,411\,508\,418\,214\,785\,511\,434\,381\,832\,551\,080\,\Theta_0-29\,681\,600\,210\,829\,326\,509\,291\,639\,716\,850\,000\,\Theta_0^2+515\,640\,380\,264\,981\,766\,410\,868\,299\,643\,750\,\Theta_0^3-4\,185\,593\,723\,053\,383\,643\,593\,468\,281\,250\,\Theta_0^4+12\,683\,246\,824\,025\,830\,727\,103\,515\,625\,\Theta_0^5\right)}$$

$\gamma=\frac{2}{5}$ $\delta=\frac{3}{7}$ $\epsilon=-2$ $\zeta=-1$ $\alpha=\frac{9}{11}$ $\beta=-\frac{1536}{385}$ $\Theta_0=34.0207$ $\Theta_1=-21.0029$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Cas N=4 et $\sigma_0=-a \Rightarrow \varepsilon+\delta=-4 \quad \varepsilon=-2 \ \ et \ \ \delta=-2$ ***ou*** $\sigma_0=-b \Rightarrow \delta+\zeta=-4 \quad \delta=-2 \ \ et \ \ \zeta=-2$ ***ou*** $\sigma_0=-a\,b \Rightarrow \varepsilon+\zeta=-4 \quad \varepsilon=-2 \ \ et \ \ \zeta=-2$

Nous avons à faire avec un système de 7 équations linéaires en s_1, s_2, s_3, s_4. En posant formellement :

$$\sigma=\frac{1}{b} \ \ et \ \ \sigma_0=-a \rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_4 + a\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3+s_4)}{a\,\alpha\,\beta}$$
$$\sigma=\frac{1}{a} \ \ et \ \ \sigma_0=-b \rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_4 + b\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3+s_4)}{b\,\alpha\,\beta}$$
$$\sigma=1 \ \ et \ \ \sigma_0=-a\,b \rightarrow s_0=-\frac{\vartheta_0 s_4 + a\,b\,\alpha\,\beta\,(s_1+s_2+s_3+s_4)}{a\,b\,\alpha\,\beta}$$

sachant que $s_0=1$ on obtient un système de 7 équations linéaires homogènes en s_1, s_2, s_3, s_4 où chacun des coefficients est de la forme : $\begin{cases} T_{i,1}=a_{i,1}+b_{i,1}\,\vartheta_0+c_{i,1}\,\vartheta_1 \\ T_{i,2}=a_{i,2}+\vartheta_0\left(b_{i,2}+c_{i,2}\vartheta_0+d_{i,2}\vartheta_1\right)+e_{i,2}\vartheta_1 \end{cases}$ *, notons les déterminants construits 4 à 4 sur ce système d'équations linéaires et devant être nuls :* $D_{i,j,k,l}=\begin{bmatrix} T_{i,1} & T_{i,2} & T_{i,3} & T_{i,4} \\ T_{j,1} & T_{j,2} & T_{j,3} & T_{j,4} \\ T_{k,1} & T_{k,2} & T_{k,3} & T_{k,4} \\ T_{l,1} & T_{l,2} & T_{l,3} & T_{l,4} \end{bmatrix}=0$ *. Comme indiqué plus haut, il convient de former 35 déterminants et de s'assurer qu'ils sont tous simultanément nuls. Or chacun de ces déterminants est de degré 4 en ϑ_0 et de degré 3 en ϑ_1 donc en prenant 4 quelconques de ces 35 déterminants (52360 choix possibles), on réduit l'expression en un polynôme de degré 1 en ϑ_1. Cela revient à pouvoir exprimer ϑ_1 comme une forme rationnelle entre deux polynômes en ϑ_0:* $\vartheta_1=\frac{P_{11}(\vartheta_0)}{Q_{10}(\vartheta_0)}$ *. Cette relation est alors injectée dans chacun de ces 35 déterminants et en recherchant entre eux le plus grand commun diviseur polynomial, on aboutit à un polynôme de degré 9 dont ϑ_0 doit être une racine. Ainsi la relation entre ϑ_0 et ϑ_1 s'exprime sous la forme* $\vartheta_1=\frac{\tilde{P}_8(\vartheta_0)}{\tilde{Q}_8(\vartheta_0)}$ *. En revenant au N-1=3 premières équations linéaires :* $\begin{cases} T_{0,1}s_1+T_{0,2}s_2+T_{0,3}s_3+T_{0,4}s_4=0 \\ T_{1,1}s_1+T_{1,2}s_2+T_{1,3}s_3+T_{1,4}s_4=0 \\ T_{2,1}s_1+T_{2,2}s_2+T_{2,3}s_3+T_{2,4}s_4=0 \end{cases}$ *et en substituant les relations suivantes* $\begin{cases} \sigma_0=-a \rightarrow s_4=-\frac{a\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2+s_3) \\ \sigma_0=-b \rightarrow s_4=-\frac{b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+b\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2+s_3) \\ \sigma_0=-a\,b \rightarrow s_4=-\frac{a\,b\,\alpha\,\beta}{\theta_0+a\,b\,\alpha\,\beta}\times(1+s_1+s_2+s_3) \end{cases}$ *le système des trois équations linéaires n'est plus homogène et permet de déterminer alors les variables s_1, s_2, s_3 puis s_4. Les valeurs recherchées de e_1, e_2, e_3, e_4 sont racines dans un ordre fixé du polynôme formé à partir des valeurs de s_1, s_2, s_3, s_4 comme suit :* $-e_1,-e_2,-e_3,-e_4 \ \ racines\ de \ \ z^4+s_1z^3+s_2z^2+s_3z+s_4=0$.

Le premier exemple de solution hypergéométrique généralisée présente :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]= $\frac{3}{2}$ = 1.5 a[4]= $\frac{8}{3}$ = 2.66667

θ_0 racines de l'équation $-\frac{77\,600\,981\,389\,159\,191\,197}{641\,959\,232\,274\,432}+\frac{11\,174\,996\,290\,353\,205\,825\,\theta_0}{80\,244\,904\,034\,304}+\frac{28\,012\,209\,648\,073\,091\,\theta_0^2}{278\,628\,139\,008}-\frac{2\,608\,473\,852\,831\,211\,\theta_0^3}{34\,828\,517\,376}-\frac{3\,421\,846\,546\,811\,\theta_0^4}{107\,495\,424}+\frac{25\,627\,275\,893\,\theta_0^5}{4\,478\,976}+\frac{41\,215\,751\,\theta_0^6}{10\,368}+\frac{276\,899\,\theta_0^7}{432}+\frac{339\,\theta_0^8}{8}+\theta_0^9==0$

Liste des racines : $\{\theta_0\to -16.4241,\ \theta_0\to -11.0062,\ \theta_0\to -8.19872,\ \theta_0\to -5.42824,\ \theta_0\to -4.05929,\ \theta_0\to -1.58678,\ \theta_0\to 0.74522,\ \theta_0\to 1.50984,\ \theta_0\to 2.07326\}$

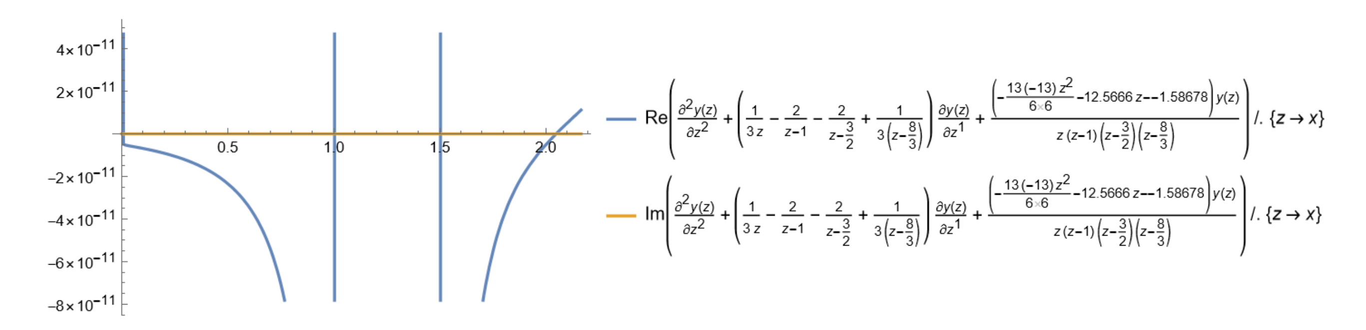
$\theta_1[\theta_0]=$

$$\frac{23\,013\,693\,301\,743\,051\,355\,008\,946\,328\,415\,783\,801\,392\,149-16\,089\,887\,418\,619\,180\,032\,366\,926\,975\,444\,860\,527\,623\,842\,\theta_0-19\,383\,551\,411\,331\,016\,577\,228\,902\,582\,932\,782\,888\,810\,688\,\theta_0^2-797\,745\,676\,155\,078\,510\,985\,352\,175\,959\,482\,891\,974\,528\,\theta_0^3+3\,196\,609\,524\,479\,031\,540\,015\,450\,241\,252\,899\,525\,961\,728\,\theta_0^4+1\,070\,282\,975\,460\,889\,221\,390\,575\,294\,408\,599\,714\,013\,184\,\theta_0^5+138\,534\,775\,461\,382\,812\,738\,318\,485\,164\,172\,919\,177\,216\,\theta_0^6+7\,477\,409\,832\,966\,764\,106\,957\,819\,688\,264\,656\,224\,256\,\theta_0^7+139\,618\,565\,184\,990\,391\,336\,686\,604\,710\,926\,352\,384\,\theta_0^8}{2304\,(977\,016\,589\,058\,699\,040\,469\,728\,277\,924\,907\,407\,361-591\,329\,299\,870\,882\,770\,679\,933\,291\,749\,811\,779\,842\,\theta_0-840\,296\,881\,710\,191\,337\,617\,287\,660\,671\,009\,374\,688\,\theta_0^2-60\,818\,336\,781\,614\,145\,216\,632\,284\,813\,489\,189\,248\,\theta_0^3+131\,677\,788\,143\,417\,553\,940\,399\,318\,926\,415\,577\,088\,\theta_0^4+46\,842\,567\,130\,557\,137\,467\,706\,264\,277\,578\,588\,160\,\theta_0^5+6\,405\,515\,765\,160\,137\,136\,800\,396\,116\,183\,351\,296\,\theta_0^6+375\,377\,932\,124\,918\,545\,667\,962\,849\,394\,688\,000\,\theta_0^7+7\,862\,554\,867\,844\,860\,686\,575\,918\,987\,083\,776\,\theta_0^8)}$$

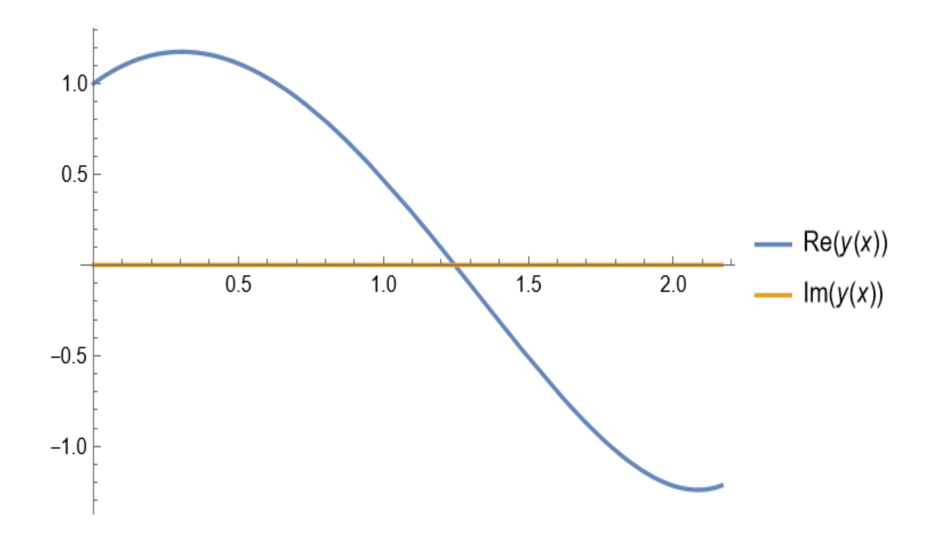
$\gamma=\frac{1}{3}$ $\delta=-2$ $\epsilon=-2$ $\zeta=\frac{1}{3}$ $\alpha=-\frac{13}{6}$ $\beta=-\frac{13}{6}$ $\theta_0=-1.58678$ $\theta_1=12.5666$

s[1]=-2.20806 s[2]=-0.446878 s[3]=1.58422 s[4]=0.0912948 e[1]=0.779529 e[2]=0.0569763 e[3]=-1.01058 e[4]=-2.03399 $\sigma=\frac{3}{8}=0.375$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Le deuxième exemple de solution hypergéométrique généralisée présente :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{13}{7}=1.85714$ $a[4]=\frac{13}{5}=2.6$

θ_0 racines de l'équation

$$-\frac{279\,942\,666\,610\,531\,133\,106\,453\,317\,749\,453\,288\,565\,982\,298\,570\,752}{30\,615\,909\,810\,254\,334\,963\,455\,853\,269\,781\,446\,659\,472\,078\,125}+\frac{5\,473\,232\,894\,659\,787\,432\,247\,817\,308\,466\,470\,682\,546\,348\,032\,\theta_0}{556\,096\,808\,832\,155\,752\,673\,796\,263\,187\,384\,373\,071\,875}-\frac{2\,203\,978\,963\,055\,599\,069\,144\,129\,060\,091\,083\,133\,853\,696\,\theta_0^2}{252\,518\,757\,983\,905\,073\,414\,674\,536\,003\,716\,453\,125}+\frac{3\,882\,378\,511\,939\,671\,278\,682\,004\,546\,912\,088\,576\,\theta_0^3}{655\,237\,640\,240\,032\,885\,075\,118\,481\,528\,125}-\frac{5\,696\,153\,863\,733\,194\,333\,711\,222\,412\,928\,\theta_0^4}{1\,214\,439\,809\,244\,619\,731\,057\,659\,375}+\frac{15\,590\,881\,379\,282\,662\,577\,216\,\theta_0^5}{9\,187\,282\,440\,361\,650\,625}-\frac{576\,876\,739\,564\,698\,624\,\theta_0^6}{8\,176\,856\,590\,277\,375}-\frac{1\,518\,905\,138\,536\,\theta_0^7}{21\,217\,371\,175}+\frac{2\,534\,874\,\theta_0^8}{385\,385}+\theta_0^9==0$$

Liste des racines : $\{\theta_0\to-10.864,\ \theta_0\to-6.51255,\ \theta_0\to-0.447755-1.23895\,i,\ \theta_0\to-0.447755+1.23895\,i,$
$\theta_0\to0.898064-0.969786\,i,\ \theta_0\to0.898064+0.969786\,i,\ \theta_0\to3.15452-1.38722\,i,\ \theta_0\to3.15452+1.38722\,i,\ \theta_0\to3.58936\}$

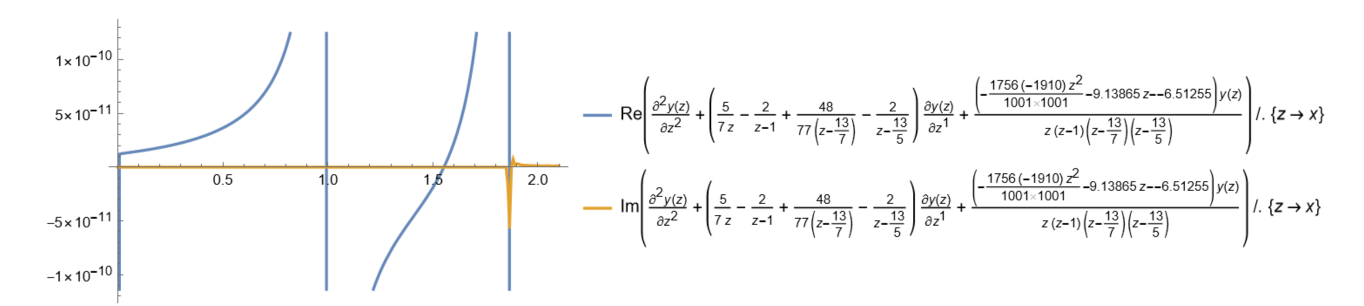
$\theta_1[\theta_0]=$

$$\frac{\begin{array}{l}-63\,650\,866\,355\,187\,424\,345\,651\,145\,079\,362\,928\,854\,172\,884\,387\,955\,968\,177\,465\,015\,974\,252\,689\,785\,827\,338\,099\,834\,754\,766\,975\,336\,448\,+\\ 242\,253\,349\,804\,438\,392\,489\,809\,222\,013\,732\,410\,477\,166\,306\,581\,751\,296\,839\,077\,500\,980\,385\,493\,280\,963\,604\,471\,608\,170\,226\,405\,355\,520\,\theta_0-\\ 885\,680\,585\,930\,494\,129\,089\,224\,947\,448\,774\,153\,935\,499\,343\,768\,801\,597\,462\,234\,906\,575\,175\,128\,500\,687\,984\,462\,048\,228\,666\,248\,182\,784\,\theta_0^2+\\ 231\,307\,960\,085\,829\,941\,355\,527\,434\,633\,819\,602\,735\,543\,773\,232\,021\,139\,924\,592\,447\,708\,800\,802\,245\,045\,849\,338\,580\,916\,632\,146\,724\,800\,\theta_0^3+\\ 126\,678\,205\,061\,249\,999\,794\,520\,549\,217\,774\,930\,184\,586\,492\,810\,773\,117\,916\,501\,205\,232\,630\,998\,730\,564\,900\,193\,966\,944\,229\,009\,317\,680\,\theta_0^4-\\ 33\,209\,451\,980\,797\,599\,609\,364\,016\,779\,895\,599\,414\,855\,399\,923\,047\,631\,128\,877\,379\,558\,266\,429\,864\,788\,269\,992\,407\,819\,964\,965\,625\,200\,\theta_0^5+\\ 1\,014\,579\,853\,087\,992\,311\,890\,764\,299\,773\,598\,956\,881\,277\,297\,300\,378\,853\,459\,202\,335\,572\,538\,456\,180\,589\,647\,866\,726\,163\,735\,822\,750\,\theta_0^6+\\ 285\,991\,211\,798\,580\,334\,664\,076\,097\,115\,964\,284\,859\,596\,981\,338\,530\,849\,749\,633\,398\,284\,750\,329\,974\,475\,068\,398\,834\,547\,156\,926\,875\,\theta_0^7-\\ 15\,388\,943\,410\,582\,328\,653\,120\,782\,724\,238\,583\,491\,234\,559\,806\,338\,448\,472\,489\,661\,082\,961\,538\,107\,088\,456\,491\,978\,205\,547\,721\,875\,\theta_0^8\end{array}}{\begin{array}{l}20\,489\,918\,449\,(339\,902\,751\,789\,455\,768\,824\,470\,297\,697\,546\,491\,578\,142\,363\,766\,953\,765\,615\,911\,774\,155\,407\,420\,648\,540\,702\,012\,125\,184\,+\\ 473\,335\,115\,291\,382\,516\,746\,649\,855\,095\,246\,374\,702\,678\,224\,029\,011\,490\,924\,736\,702\,001\,239\,710\,532\,745\,113\,398\,784\,000\,\theta_0-\\ 6\,662\,336\,243\,440\,776\,237\,911\,595\,372\,093\,602\,399\,583\,935\,997\,240\,397\,484\,389\,544\,529\,853\,596\,088\,375\,354\,815\,817\,944\,768\,\theta_0^2+\\ 1\,863\,127\,478\,645\,199\,330\,411\,920\,551\,700\,647\,367\,795\,636\,205\,614\,096\,961\,548\,910\,185\,712\,902\,240\,497\,904\,895\,283\,597\,520\,\theta_0^3+\\ 1\,544\,467\,837\,534\,159\,260\,729\,829\,754\,780\,795\,313\,536\,353\,707\,354\,618\,906\,009\,675\,730\,769\,117\,934\,118\,503\,051\,545\,758\,240\,\theta_0^4-\\ 318\,346\,609\,239\,459\,790\,470\,847\,942\,968\,392\,922\,792\,766\,977\,118\,616\,967\,446\,832\,110\,461\,329\,902\,720\,335\,272\,599\,989\,350\,\theta_0^5-\\ 27\,454\,268\,413\,700\,655\,881\,989\,501\,737\,419\,336\,504\,223\,001\,452\,278\,494\,743\,620\,377\,776\,856\,780\,550\,490\,684\,005\,760\,125\,\theta_0^6+\\ 5\,634\,462\,995\,983\,180\,131\,536\,629\,524\,786\,237\,879\,713\,032\,767\,467\,956\,242\,507\,310\,171\,647\,100\,519\,833\,190\,158\,778\,750\,\theta_0^7+\\ 407\,645\,108\,268\,412\,867\,602\,886\,302\,350\,335\,676\,273\,570\,990\,780\,376\,558\,856\,622\,299\,749\,323\,328\,152\,559\,439\,768\,750\,\theta_0^8)\end{array}}$$

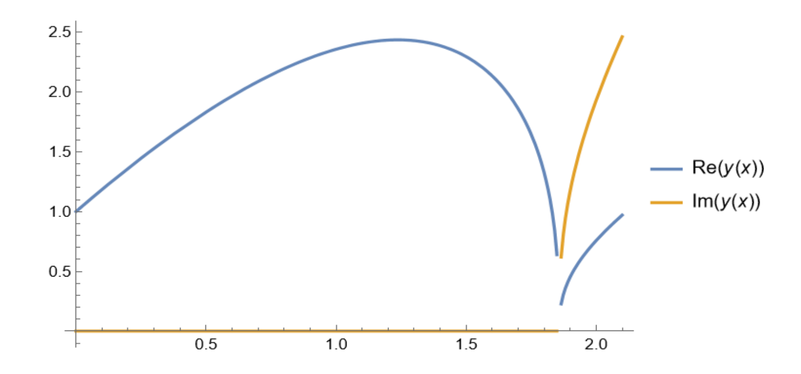
$\gamma=\frac{5}{7}$ $\delta=-2$ $\epsilon=\frac{48}{77}$ $\zeta=-2$ $\alpha=-\frac{1756}{1001}$ $\beta=-\frac{1910}{1001}$ $\theta_0=-6.51255$ $\theta_1=9.13865$

$s[1]=-3.84851$ $s[2]=4.60065$ $s[3]=-1.73787$ $s[4]=-0.0566894$ $e[1]=0.0301521$ $e[2]=-0.957247+0.202195\,i$ $e[3]=-0.957247-0.202195\,i$ $e[4]=-1.96417$ $\sigma=\frac{7}{13}=0.538462$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



Le troisième exemple de solution hypergéométrique généralisée se présente avec :

- les paramètres associés :

Points singuliers finis $a[1]=0$ $a[2]=1$ $a[3]=\frac{13}{7}=1.85714$ $a[4]=\frac{13}{5}=2.6$

θ_0 racines de l'équation $-\frac{640\,951\,590\,020\,669\,512\,928\,817\,510\,615\,773\,071\,648\,235\,347\,058\,688}{5\,708\,676\,581\,492\,024\,022\,860\,130\,011\,176\,799\,024\,268\,484\,375}+\frac{39\,725\,134\,323\,742\,123\,015\,091\,543\,214\,016\,493\,490\,186\,751\,488\,\theta_0}{137\,548\,528\,576\,055\,321\,852\,881\,237\,770\,204\,540\,015\,625}-\frac{141\,375\,072\,593\,598\,316\,749\,347\,585\,090\,882\,756\,057\,856\,\theta_0^2}{3\,314\,182\,795\,847\,416\,375\,994\,054\,351\,979\,484\,375}-\frac{283\,838\,731\,763\,868\,142\,804\,687\,381\,302\,014\,656\,\theta_0^3}{2\,281\,544\,394\,964\,506\,094\,908\,150\,771\,875}+\frac{3\,738\,433\,980\,380\,067\,709\,510\,180\,495\,872\,\theta_0^4}{54\,972\,999\,420\,873\,336\,744\,528\,125}-\frac{2\,941\,024\,830\,795\,587\,579\,016\,592\,\theta_0^5}{264\,910\,967\,500\,534\,114\,375}-\frac{592\,573\,978\,874\,530\,704\,\theta_0^6}{1\,276\,587\,078\,045\,125}+\frac{13\,938\,662\,427\,908\,\theta_0^7}{43\,062\,475\,225}-\frac{6\,667\,176\,\theta_0^8}{207\,515}+\theta_0^9==0$

Liste des racines : $\{\theta_0\to-6.23956,\ \theta_0\to-1.3536,\ \theta_0\to0.448515,\ \theta_0\to3.0598,\ \theta_0\to3.27083,\ \theta_0\to3.83214,\ \theta_0\to5.68277,\ \theta_0\to10.6081,\ \theta_0\to12.8197\}$

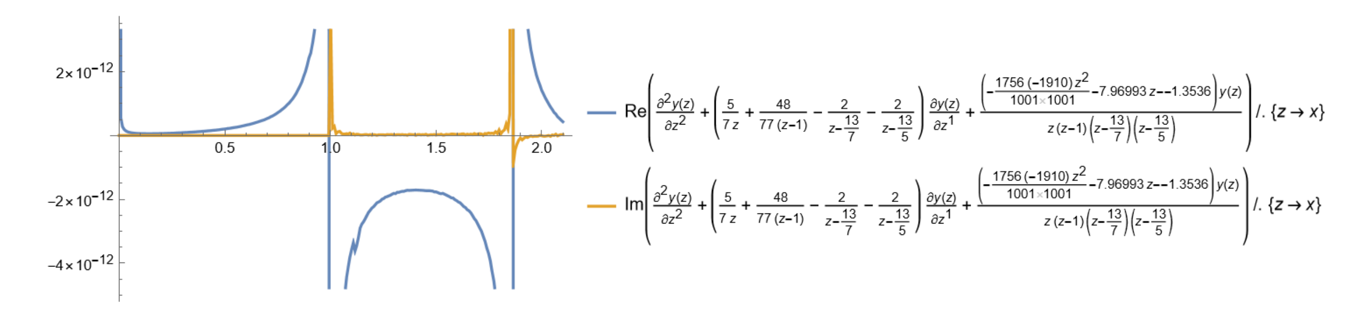
$\theta_1[\theta_0]=$

$$\frac{\begin{array}{l}2\,139\,702\,171\,260\,365\,327\,020\,839\,958\,244\,702\,811\,288\,068\,142\,034\,893\,756\,055\,759\,626\,265\,632\,777\,905\,256\,796\,865\,752\,419\,952\,289\,093\,632\,-\\ 4\,612\,797\,693\,172\,642\,681\,241\,810\,876\,032\,379\,507\,855\,673\,900\,778\,648\,845\,464\,596\,219\,940\,973\,020\,816\,434\,116\,853\,323\,367\,334\,471\,721\,216\,\theta_0+\\ 2\,738\,941\,113\,114\,847\,314\,131\,204\,629\,163\,027\,993\,747\,406\,899\,421\,126\,011\,004\,829\,096\,924\,378\,918\,698\,738\,652\,642\,612\,294\,601\,550\,011\,616\,\theta_0^2-\\ 564\,504\,440\,840\,412\,677\,587\,520\,444\,206\,731\,886\,944\,238\,240\,873\,329\,872\,730\,174\,616\,477\,872\,654\,703\,063\,753\,952\,187\,132\,274\,685\,724\,720\,\theta_0^3-\\ 6\,011\,233\,816\,888\,816\,190\,138\,840\,508\,210\,118\,350\,769\,257\,625\,039\,594\,500\,027\,259\,390\,273\,722\,273\,869\,890\,315\,748\,035\,476\,199\,341\,360\,\theta_0^4+\\ 16\,906\,565\,226\,962\,596\,911\,497\,451\,912\,289\,233\,387\,896\,483\,799\,043\,039\,181\,793\,304\,033\,978\,356\,502\,682\,981\,404\,678\,430\,533\,323\,862\,000\,\theta_0^5-\\ 2\,114\,059\,112\,876\,973\,110\,954\,269\,016\,003\,031\,958\,682\,030\,682\,785\,217\,904\,013\,780\,126\,168\,564\,400\,817\,769\,284\,226\,908\,153\,407\,157\,750\,\theta_0^6+\\ 92\,325\,805\,541\,535\,128\,653\,456\,143\,445\,690\,074\,387\,071\,420\,704\,867\,667\,185\,868\,107\,891\,050\,180\,771\,777\,219\,449\,113\,723\,189\,341\,875\,\theta_0^7-\\ 1\,068\,568\,767\,489\,144\,220\,807\,584\,064\,851\,797\,318\,818\,428\,296\,812\,075\,670\,579\,189\,119\,552\,683\,909\,773\,708\,513\,361\,683\,306\,346\,875\,\theta_0^8\end{array}}{\begin{array}{l}5\,940\,863\,929\,(80\,563\,362\,026\,852\,210\,554\,050\,733\,569\,330\,766\,554\,895\,797\,491\,103\,656\,705\,308\,639\,175\,674\,633\,340\,333\,099\,731\,606\,050\,048\,-\\ 107\,770\,244\,404\,622\,395\,025\,983\,910\,453\,789\,652\,465\,201\,677\,392\,073\,270\,893\,357\,514\,171\,789\,248\,879\,992\,422\,325\,630\,732\,384\,\theta_0+\\ 43\,924\,090\,621\,408\,459\,233\,965\,596\,414\,774\,304\,501\,953\,204\,749\,525\,014\,027\,232\,406\,450\,049\,127\,190\,111\,253\,015\,966\,983\,824\,\theta_0^2-\\ 3\,534\,162\,086\,527\,322\,042\,406\,311\,052\,205\,732\,181\,880\,032\,293\,098\,009\,874\,026\,220\,241\,567\,353\,063\,759\,390\,775\,936\,304\,160\,\theta_0^3-\\ 1\,294\,746\,043\,580\,311\,176\,146\,940\,235\,099\,959\,601\,442\,637\,472\,705\,721\,659\,261\,376\,659\,309\,932\,771\,099\,293\,797\,061\,918\,720\,\theta_0^4+\\ 224\,882\,379\,144\,399\,420\,871\,016\,696\,956\,293\,501\,385\,814\,339\,364\,237\,373\,448\,100\,268\,310\,806\,206\,596\,685\,026\,914\,513\,950\,\theta_0^5-\\ 6\,725\,198\,681\,668\,915\,068\,763\,007\,488\,765\,957\,298\,344\,635\,164\,203\,662\,841\,657\,703\,770\,689\,607\,067\,451\,989\,958\,319\,625\,\theta_0^6-\\ 528\,253\,447\,858\,273\,976\,939\,784\,206\,651\,809\,397\,166\,031\,444\,867\,999\,812\,507\,888\,351\,355\,433\,327\,601\,904\,341\,057\,500\,\theta_0^7+\\ 23\,078\,913\,955\,980\,190\,994\,413\,028\,794\,687\,452\,496\,410\,561\,428\,426\,909\,414\,365\,584\,406\,941\,464\,589\,744\,839\,490\,625\,\theta_0^8)\end{array}}$$

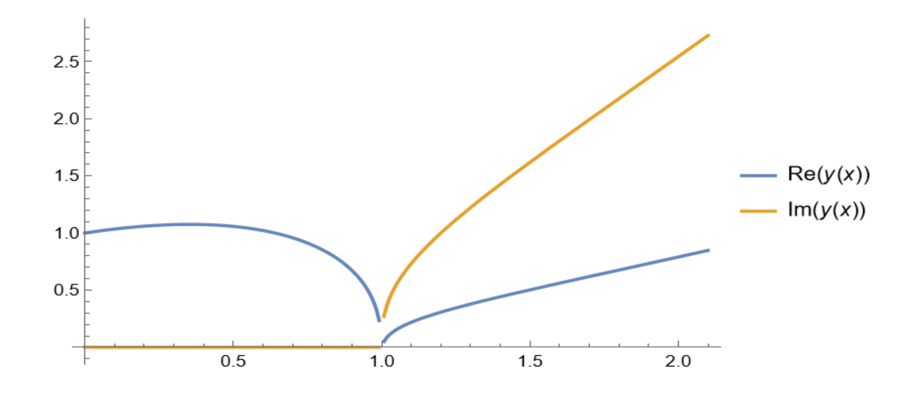
$\gamma=\frac{5}{7}$ $\delta=\frac{48}{77}$ $\epsilon=-2$ $\zeta=-2$ $\alpha=-\frac{1756}{1001}$ $\beta=-\frac{1910}{1001}$ $\theta_0=-1.3536$ $\theta_1=7.96993$

$s[1]=-4.26797$ $s[2]=5.77365$ $s[3]=-2.35625$ $s[4]=-0.163089$ $e[1]=0.0599979$ $e[2]=-1.03946$ $e[3]=-1.34674$ $e[4]=-1.94177$ $\sigma=1$

- le graphe de l'équation différentielle des parties réelles et imaginaires :



- le graphe des parties réelles et imaginaires de la fonction :



<u>Construction des solutions polynomiales de l'équation fuschienne à 5 points singuliers réguliers</u>

Comme pour l'équation de Heun, partons des solutions locales autour du point z=0, et déterminons les conditions pour lesquelles ces solutions sont de développement fini, soit que le développement soit de la forme : $y_1(z)=\sum_{j=0}^{j=+N} d_j z^j$ *. Si l'équation fuchsienne est la suivante :*

$$\begin{cases} y''(z)+\left(\dfrac{\gamma}{z}+\dfrac{\delta}{z-1}+\dfrac{\varepsilon}{z-a}+\dfrac{\zeta}{z-b}\right)y'(z)+\dfrac{\left(\alpha\ \beta\ z^2-\theta_1 z-\theta_0\right)}{z(z-1)(z-a)(z-b)}\,y(z)=0 \\ Contrainte\ de\ Fuchs\quad \alpha+\beta+1=\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta \end{cases}$$

La récurrence à 4 termes s'écrit de la manière suivante :

$$A_{j-3}\,d_{j-3}+B_{j-2}\,d_{j-2}+C_{j-1}\,d_{j-1}+D_j\,d_j=0 \qquad \begin{cases} A_j=-(j+\alpha)(j+\beta) \\ B_j=\vartheta_1+j\,((j+\alpha+\beta)(1+a+b)-\delta-a\,\varepsilon-b\,\zeta) \\ C_j=\vartheta_0-j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b)+a\,\zeta+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta) \\ D_j=j\,a\,b\,(\gamma+j-1) \end{cases}$$

Je vais écrire cette récurrence sous la forme suivante : $\widetilde{A}_j\,d_{j-2}+\widetilde{B}_j\,d_{j-1}+\widetilde{C}_j\,d_j+\widetilde{D}_j\,d_{j+1}=0=0$ *, soit encore les expressions pour cette dernière :*

$$\widetilde{A}_j\,d_{j-2}+\widetilde{B}_j\,d_{j-1}+\widetilde{C}_j\,d_j+\widetilde{D}_j\,d_{j+1}=0 \qquad \begin{cases} \widetilde{A}_j=A_{j-2}=-(j-2+\alpha)(j-2+\beta) \\ B_j=B_{j-1}=\vartheta_1+(j-1)((j-1+\alpha+\beta)(1+a+b)-\delta-a\,\varepsilon-b\,\zeta) \\ \widetilde{C}_j=C_j=\vartheta_0-j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b)+a\,\zeta+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta) \\ \widetilde{D}_j=D_{j+1}=(j+1)\,a\,b\,(\gamma+j) \end{cases}$$

Il existe trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une récurrence à quatre termes s'arrête à l'indice N :

$$\widetilde{A}_j\,d_{j-2}+\widetilde{B}_j\,d_{j-1}+\widetilde{C}_j\,d_j+\widetilde{D}_j\,d_{j+1}=0\rightarrow\begin{cases} \widetilde{A}_{N+2}=0 \\ \widetilde{A}_{N+1}\,d_{N-1}+\widetilde{B}_{N+1}\,d_N=0 \\ \widetilde{A}_N\,d_{N-2}+\widetilde{B}_N\,d_{N-1}+\widetilde{C}_N\,d_N=0 \end{cases}$$

Si l'on exprime l'ensemble de la récurrence comme un système linéaire donc les coefficients doivent avoir une solution non triviale (non nulle) :

$$\begin{cases} \widetilde{C}_0\,d_0+\widetilde{D}_0\,d_1=0 \\ \widetilde{B}_1\,d_0+\widetilde{C}_1\,d_1+\widetilde{D}_1\,d_2=0 \\ \widetilde{A}_2\,d_0+\widetilde{B}_2\,d_1+\widetilde{C}_2\,d_2+\widetilde{D}_j\,d_{j+1}=0 \\ \ldots \\ \widetilde{A}_{N-1}\,d_{N-3}+\widetilde{B}_{N-1}\,d_{N-2}+\widetilde{C}_{N-1}\,d_{N-1}+\widetilde{D}_{N-1}\,d_N=0 \\ \widetilde{A}_N\,d_{N-2}+\widetilde{B}_N\,d_{N-1}+\widetilde{C}_N\,d_N=0 \end{cases}$$

Alors la condition globale supplémentaire est que le déterminant suivant s'annule :

$$\begin{vmatrix} \tilde{C}_0 & \tilde{D}_0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \tilde{B}_1 & \tilde{C}_1 & \tilde{D}_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \tilde{A}_2 & \tilde{B}_2 & \tilde{C}_2 & \tilde{D}_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \tilde{A}_{N-1} & \tilde{B}_{N-1} & \tilde{C}_{N-1} & \tilde{D}_{N-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \tilde{A}_N & \tilde{B}_N & \tilde{C}_N \end{vmatrix} = 0$$

On remarque tout de suite que la dernière condition $\tilde{A}_N\, d_{N-2} + \tilde{B}_N\, d_{N-1} + \tilde{C}_N\, d_N = 0$ *est parmi les trois premières conditions, aussi, outre l'annulation du déterminant, les deux conditions nécessaires et suffisantes sont les suivantes :* $\begin{cases} \tilde{A}_{N+2} = 0 \\ \tilde{A}_{N+1}\, d_{N-1} + \tilde{B}_{N+1}\, d_N = 0 \end{cases}$ *.*

<u>*Premières solutions polynomiales, cas simple β=-N, α=β+1=1-N*</u>

Les solutions polynomiales les plus simples s'obtiennent en supposant que : $\begin{cases} \tilde{A}_{N+2} = 0 \\ \tilde{A}_{N+1} = \tilde{B}_{N+1} = 0 \end{cases}$ *, ce qui permet à l'évidence de répondre aux deux conditions* $\begin{cases} \tilde{A}_{N+2} = 0 \\ \tilde{A}_{N+1}\, d_{N-1} + \tilde{B}_{N+1}\, d_N = 0 \end{cases}$ *.*

Ces premières solutions polynomiales sont alors construites aisément, selon les valeurs de paramètres :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -(N+\alpha)(N+\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = -N \quad ou \quad \beta = -N \\ \tilde{A}_{N+1} = 0 \Rightarrow \beta = 1-N \quad ou \quad \alpha = 1-N \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta = 1 - 2N \\ \tilde{B}_{N+1} = 0 \Rightarrow \vartheta_1 + N\left((N+\alpha+\beta)(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta\right) = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = -N\left((1-N)(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta\right) \end{cases}$$

Si par convention on choisit l'option $\beta = -N$ *alors le choix de paramètre devient :*

$$\begin{cases} \beta = -N \\ \alpha = 1-N \qquad\qquad comme \quad 1+\alpha+\beta = 2(1-N) = \gamma+\delta+\varepsilon+\zeta \\ \Rightarrow \vartheta_1 = N\left((N-1)(1+a+b) + \delta + a\,\varepsilon + b\,\zeta\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = N\left((N-1)(1+a+b) + \delta + a\,\varepsilon + b\,(2(1-N) - \gamma - \delta - \varepsilon)\right)$$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = N\left((N-1)(1+a-b) + \delta + a\,\varepsilon - b\,(\gamma + \delta + \varepsilon)\right)$$

Le paramètre ϑ_0 est calculé suite à l'annulation du déterminant précédemment introduit. Si l'on remarque que les termes diagonaux s'écrivent comme suit :

$$\tilde{C}_j = \vartheta_0 - j\left((\gamma + j - 1)(a + b + a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta\right) = \vartheta_0 + E_j$$

Alors le déterminant prend la forme :

$$\begin{vmatrix} \vartheta_0+E_0 & \widetilde{D}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{B}_1 & \vartheta_0+E_1 & \widetilde{D}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{A}_2 & \widetilde{B}_2 & \vartheta_0+E_2 & \widetilde{D}_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \widetilde{A}_{N-1} & \widetilde{B}_{N-1} & \vartheta_0+E_{N-1} & \widetilde{D}_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \widetilde{A}_N & \widetilde{B}_N & \vartheta_0+E_N \end{vmatrix} = 0$$

, et il est aisé de conclure que ϑ_0 est la racine d'une équation polynomiale de degré N+1. Il y a donc N+1 solutions possibles en calculant explicitement ce déterminant ces N+1 racines. Finalement cette construction est dans l'esprit tout à fait identique à celle réalisée pour l'équation de Heun.

Traitons rapidement la solution polynomiale du premier degré pour laquelle :

$$\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 0 \\ \vartheta_1 = \delta + a\,\varepsilon - b\left(\gamma+\delta+\varepsilon\right) \end{cases}$$

L'équation polynomiale en ϑ_0 est obtenu par annulation du déterminant :

$$\zeta = \alpha+\beta+1-\gamma-\delta-\varepsilon = -\gamma-\delta-\varepsilon$$

$$\begin{vmatrix} \widetilde{C}_0 & \widetilde{D}_0 \\ \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_1 \end{vmatrix} = \widetilde{C}_0\widetilde{C}_1 - \widetilde{D}_0\widetilde{B}_1 = 0 \Leftarrow \begin{cases} \widetilde{C}_0 = \vartheta_0 \\ \widetilde{C}_1 = \vartheta_0 - \left(\gamma\left(a+b+a\,b\right)+a\,\zeta+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta\right) = \vartheta_0 - \left(\gamma\left(a+b+a\,b\right)-a\left(\gamma+\delta+\varepsilon\right)+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta\right) \\ \widetilde{B}_1 = \vartheta_1 \\ \widetilde{D}_0 = a\,b\,\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vartheta_0^{\,2} + \vartheta_0\left(a\left(\delta+\varepsilon\right)-b\left(\gamma+\varepsilon\right)-a\,b\left(\gamma+\delta\right)\right) - \vartheta_1 a\,b\,\gamma = 0$$

ϑ_0 est donc racine d'une équation quadratique, et les deux valeurs sont les suivantes :

$$\vartheta_0^{\,2} + \vartheta_0\left(a\left(\delta+\varepsilon\right)-b\left(\gamma+\varepsilon\right)-a\,b\left(\gamma+\delta\right)\right) - \vartheta_1 a\,b\,\gamma = 0$$

$$\vartheta_0 = \frac{b\left(\gamma+\varepsilon\right)-a\left(\delta+\varepsilon\right)+a\,b\left(\gamma+\delta\right) \pm \sqrt{\left(a\left(\delta+\varepsilon\right)-b\left(\gamma+\varepsilon\right)-a\,b\left(\gamma+\delta\right)\right)^2+4\,\vartheta_1 a\,b\,\gamma}}{2}$$

La solution polynomiale s'écrit : $d_1 = -\frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \Rightarrow y(z) = 1 + d_1 z = 1 - \frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} z$

Deuxièmes solutions polynomiales, cas général

Il n'est toutefois pas nécessaire d'imposer les deux conditions restrictives $\widetilde{A}_{N+1} = \widetilde{B}_{N+1} = 0$ pour obtenir une solution polynomiale plus générale . Tout d'abord la condition nécessaire $\widetilde{A}_{N+2} = 0$ reste indispensable, et par choix elle nous conduit à fixer la valeur de $\beta = -N$. Maintenant il suffit de procéder autrement en reconsidérant le système initial d'équations linéaires en y rajoutant la seule condition restée nécessaire (et suffisante) : $\widetilde{A}_{N+1}\, d_{N-1} + \widetilde{B}_{N+1}\, d_N = 0$.

La détermination des coefficients du polynôme à l'aide du système d'équations linéaires reste de même nature si l'on fixe par convention le premier des coefficients à 1, soit :

$$d_0 = 1 \quad et \quad \begin{cases} d_1 = -\dfrac{\widetilde{C}_0}{\widetilde{D}_0} = -\dfrac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \\ \widetilde{C}_1\, d_1 + \widetilde{D}_1\, d_2 = -\widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2\, d_1 + \widetilde{C}_2\, d_2 + \widetilde{D}_2\, d_3 = -\widetilde{A}_2 \\ \widetilde{A}_3\, d_1 + \widetilde{B}_3\, d_2 + \widetilde{C}_3\, d_3 + \widetilde{D}_3\, d_4 = -\widetilde{A}_3 \\ \dots \\ \widetilde{A}_{N-1}\, d_{N-3} + \widetilde{B}_{N-1}\, d_{N-2} + \widetilde{C}_{N-1}\, d_{N-1} + \widetilde{D}_{N-1}\, d_N = 0 \\ \widetilde{A}_N\, d_{N-2} + \widetilde{B}_N\, d_{N-1} + \widetilde{C}_N\, d_N = 0 \end{cases}$$

Alors la détermination des coefficients d_1,...d_N est réalisé à l'aide des N premières équations qui peuvent se formaliser avec le système matriciel NxN suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{C}_1 & \widetilde{D}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_2 & \widetilde{D}_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{A}_3 & \widetilde{B}_3 & \widetilde{C}_3 & \widetilde{D}_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \widetilde{A}_{N-2} & \widetilde{B}_{N-2} & \widetilde{C}_{N-2} & \widetilde{D}_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{A}_{N-1} & \widetilde{B}_{N-1} & \widetilde{C}_{N-1} & \widetilde{D}_{N-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \\ -\widetilde{B}_1 \\ -\widetilde{A}_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ce système matriciel on doit alors rajouter les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{A}_N\, d_{N-2} + \widetilde{B}_N\, d_{N-1} + \widetilde{C}_N\, d_N = 0 \\ \widetilde{A}_{N+1}\, d_{N-1} + \widetilde{B}_{N+1}\, d_N = 0 \end{cases}$$

dont l'une correspond à la dernière équation du système initial des N équations linéaires et l'autre à la condition supplémentaire. Logiquement la première de ces équations est équivalente à la condition d'annulation du déterminant :

$$\widetilde{A}_N\, d_{N-2} + \widetilde{B}_N\, d_{N-1} + \widetilde{C}_N\, d_N \propto \begin{vmatrix} \widetilde{C}_0 & \widetilde{D}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_1 & \widetilde{D}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \widetilde{A}_2 & \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_2 & \widetilde{D}_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \widetilde{A}_{N-1} & \widetilde{B}_{N-1} & \widetilde{C}_{N-1} & \widetilde{D}_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \widetilde{A}_N & \widetilde{B}_N & \widetilde{C}_N \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant s'exprime sous une forme polynomiale en ϑ_0 et ϑ_1 en posant :

$$\begin{cases}\tilde{C}_i=\vartheta_0+E_i\\ \tilde{B}_i=\vartheta_1+F_i\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}\vartheta_0+E_0 & \tilde{D}_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ \vartheta_1+F_1 & \vartheta_0+E_1 & \tilde{D}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ \tilde{A}_2 & \vartheta_1+F_2 & \vartheta_0+E_2 & \tilde{D}_2 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde{A}_{N-1} & \vartheta_1+F_{N-1} & \vartheta_0+E_{N-1} & \tilde{D}_{N-1}\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{A}_N & \vartheta_1+F_N & \vartheta_0+E_N\end{vmatrix}=0$$

On peut facilement se rendre compte d'après la forme des termes $\tilde{A}_N,\tilde{B}_N,\tilde{C}_N,\tilde{D}_N$ que chaque coefficient d_l est une faction polynomiale des deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1. Aussi le système des deux équations $\begin{cases}\tilde{A}_N\,d_{N-2}+\tilde{B}_N\,d_{N-1}+\tilde{C}_N\,d_N=0\\ \tilde{A}_{N+1}\,d_{N-1}+\tilde{B}_{N+1}\,d_N=0\end{cases}$ devient un système de deux équations algébriques polynomiales en ϑ_0 et ϑ_1 : $\begin{cases}P_{n_{1,0},n_{1,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0\\ Q_{n_{2,0},n_{2,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0\end{cases}$. Le degré du polynôme en ϑ_0 et ϑ_1 pour la première équation équivalente au déterminant évoqué ci-dessus est N+1 en ϑ_0 et $\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$ en ϑ_1. Pour ce qui est de la deuxième équation $\tilde{A}_{N+1}\,d_{N-1}+\tilde{B}_{N+1}\,d_N=0$, une fois mise en facteur commun, les degrés polynomiaux du numérateur sont les suivants : N en ϑ_0 et $1+\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{N+3}{2}\right\rfloor$ en ϑ_1.

$$\begin{cases}P_{n_{1,0},n_{1,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0\\ Q_{n_{2,0},n_{2,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0\end{cases}\quad avec\quad n_{1,0}=N+1\quad n_{1,1}=\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor\quad n_{2,0}=N\quad n_{1,1}=\left\lfloor\frac{N+3}{2}\right\rfloor$$

Voyons si ce cas général admet une situation particulière lorsque α=0, dans ce cas il est aisé de se rendre compte que les expressions polynomiales en ϑ_0 se factorise pour admettre une valeur particulière $\vartheta_0=\vartheta_1=0$. Les coefficients de la récurrence ont les valeurs suivantes :

$$\begin{cases}\beta=-N\quad\alpha=0\\ \zeta=1-N-\gamma-\delta-\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{A}_j=-(j-2)(j-2-N)\\ \tilde{B}_j=(j-1)((j-1-N)(1+a+b)-\delta-a\,\varepsilon-b\,\zeta)=(j-1)((j-1-N)(1+a+b)-\delta-a\,\varepsilon-b\,(1-N-\gamma-\delta-\varepsilon))\\ \tilde{C}_j=-j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b)+a\,\zeta+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta)=-j\,((\gamma+j-1)(a+b+a\,b)+a\,(1-N-\gamma-\delta-\varepsilon)+b\,\varepsilon+a\,b\,\delta)\\ \tilde{D}_j=(j+1)\,a\,b\,(\gamma+j)\end{cases}$$

Il s'avère qu'au moins trois coefficients s'annulent successivement, si bien que tous les suivants s'annulent également :

$$\begin{cases}d_0=1\quad d_1=0\\ \tilde{D}_1d_2=-\tilde{B}_1=0\Leftrightarrow d_2=0\\ \tilde{C}_2d_2+\tilde{D}_2d_3=0\Leftrightarrow d_3=-\dfrac{\tilde{C}_2}{\tilde{D}_2}d_2=0\\ \dots\end{cases}\Rightarrow d_0=1\quad d_l=0\quad l\geq 1$$

La solution est donc par évidence triviale y(z)=1. Donc en référence à l'équation différentielle de départ, lorsque $\alpha=\vartheta_0=\vartheta_1=0$ si nous cherchons les solutions polynomiales de l'équation : $y''(z)+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\varepsilon}{z-a}+\frac{\zeta}{z-b}\right)y'(z)=0$ formellement intégrable : $y(z)\propto\int_z dt\,t^{-\gamma}(t-1)^{-\delta}(t-a)^{-\varepsilon}(t-b)^{-\zeta}$, il n'y a pas vraiment de solutions polynomiales.

Retournons au cas général où α possède une valeur quelconque autre que 0 et 1-N. Il se trouve que l'on peut utiliser un algorithme simple pour résoudre complètement ce système de deux équations polynomiales en ϑ_0 et ϑ_1 quelque soit le degré dans chacun des paramètres. Ce résultat s'énonce très simplement :

Tout système de deux équations polynomiales en ϑ_0 et ϑ_1 est équivalent à déterminer ϑ_1 comme <u>une fraction polynomiale en ϑ_0</u> et ϑ_0 comme racine d'un polynôme d'un certain degré, non déterminé à l'avance mais calculable par un algorithme basé sur un système de substitution des puissance de ϑ_1 . On peut de manière équivalente choisir de déterminer d'abord ϑ_0 puis ϑ_1 comme la racine d'un polynôme à déterminer, en usant du même algorithme.

Avant d'exposer cette algorithme qui est fort simple et également facilement implémenté en Mathematica, voyons une propriété simple d'une équation appliquée à une expression polynomiale de degré quelconque. Soit l'équation l'équation polynomiale de degré n_1 en ϑ_1 : cette dernière est alors équivalente à la substitution suivante :

$$a_{n_1}\vartheta_1^{\,n_1}+a_{n_1-1}\vartheta_1^{\,n_1-1}+\ldots+a_0=0\Leftrightarrow\vartheta_1^{\,n_1}=-\left(\frac{a_{n_1-1}}{a_{n_1}}\vartheta_1^{\,n_1-1}+\ldots+\frac{a_0}{a_{n_1}}\right)\Rightarrow\vartheta_1^{\,n_1}\to P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{n}_1<n_1$$

Reportons cette substitution dans l'expression polynomiale de degré supérieure ou égale à n_1 suivante : $\begin{cases}P_{n_2}(\vartheta_1) & avec \quad n_2\ge n_1\\ \vartheta_1^{\,n_1}\to P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\end{cases}$*. En appliquant par itération successive le système suivant de substitutions l'expression polynomiale de départ devient une expression polynomiale de degré strictement inférieur à n_1:*

$$Q_{n_2}(\vartheta_1)\quad avec\quad n_2\ge n_1\quad et\quad \begin{cases}\vartheta_1^{\,n_2}\to\vartheta_1^{\,n_2-n_1}P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\\ \vartheta_1^{\,n_2-1}\to\vartheta_1^{\,n_2-n_1-1}P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\\ \ldots\\ \vartheta_1^{\,n_1}\to P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\end{cases}\Rightarrow Q_{n_2}(\vartheta_1)=\tilde{Q}_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{n}_1<n_1$$

L'algorithme décrit une étape de transformation du système d'équations polynomiales :

$$\begin{cases}P_{n_1}(\vartheta_1)=0\\ Q_{n_2}(\vartheta_1)=0\end{cases}\quad avec\quad n_2\ge n_1$$

Nous supposons évidemment que ces deux équations polynomiales sont totalement indépendantes. Il suffit alors de déterminer la substitution induite par la première équation, puis de la reporter dans la deuxième équation. Ce faisant la deuxième équation transformée induit elle-même une deuxième substitution, que l'on va appliquer sur la première équation non transformé :

$$\begin{aligned}
&(1)\quad P_{n_1}(\vartheta_1)=0\Rightarrow\vartheta_1^{\,n_1}\to P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{n}_1<n_1\\
&(2)\quad \vartheta_1^{\,n_1}\to P_{\tilde{n}_1}(\vartheta_1)\Rightarrow Q_{n_2}(\vartheta_1)=Q_{\tilde{n}_2}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{n}_2<n_1\\
&(3)\quad Q_{\tilde{n}_2}(\vartheta_1)=0\Rightarrow\vartheta_1^{\,\tilde{n}_2}\to Q_{\tilde{\tilde{n}}_2}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{\tilde{n}}_2<\tilde{n}_2<n_1\\
&(4)\quad \vartheta_1^{\,\tilde{n}_2}\to Q_{\tilde{\tilde{n}}_2}(\vartheta_1)\Rightarrow P_{n_1}(\vartheta_1)=P_{\tilde{\tilde{n}}_1}(\vartheta_1)\quad avec\quad \tilde{\tilde{n}}_1<\tilde{n}_2<n_1
\end{aligned}$$

Par ce mécanisme on a transformé un système de deux équations respectivement de de degré n_1 et n_2 en un système de deux équations de degré strictement inférieur :

$$\begin{cases} P_{n_1}(\vartheta_1)=0 \\ Q_{n_2}(\vartheta_1)=0 \end{cases} \quad avec \quad n_2 \geq n_1 \Leftrightarrow \begin{cases} P_{\tilde{\tilde{n}}_1}(\vartheta_1)=0 \\ Q_{\tilde{n}_2}(\vartheta_1)=0 \end{cases} \quad avec \quad \tilde{\tilde{n}}_1 < n_1 \quad et \quad \tilde{n}_2 < n_2$$

Dans le cas où les deux degrés résultant ne sont pas dans le même ordre que pour le système de départ, on permute les deux équations résultantes pour se trouver dans la même situation.

Si l'on réitère cette étape de l'algorithme on diminue le degré jusqu'au degré 1, soit le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} a\vartheta_1 + b = 0 \\ c\vartheta_1 + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \vartheta_1 = -\frac{b}{a} \quad et \quad ad = bc$$

Cela conduit à la détermination de ϑ_1 et à l'existence d'une contrainte sur les coefficients a,b,c,d.

Lorsque l'expression polynomiale est fonction des deux paramètres ϑ_0 et ϑ_1 alors chacune des deux équations polynomiales en est une équation polynomiale en ϑ_0 autant qu'en ϑ_1 . Par une mise en facteur commun après application des substitutions et mise en facteur commun les équations polynomiales sont réduites en degré sur la variable choisie, tandis que sur l'autre le degré est généralement augmentée. Le système final est lui même polynomial en ϑ_0 et devient ici :

$$\begin{cases} a(\vartheta_0)\vartheta_1 + b(\vartheta_0) = 0 \\ c(\vartheta_0)\vartheta_1 + d(\vartheta_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vartheta_1 = -\frac{b(\vartheta_0)}{a(\vartheta_0)} \quad et \quad \vartheta_0 \quad racine\ de \quad a(\vartheta_0)d(\vartheta_0) = b(\vartheta_0)c(\vartheta_0)$$

Car particulier : lorsque le système de départ reste polynomiale par la substitution $\zeta = \vartheta_1^{\ m}$:

$$\zeta = \vartheta_1^{\ m} \rightarrow \begin{cases} P_{n_1}(\vartheta_1) = \tilde{P}_{\tilde{n}_1}(\zeta) = 0 \quad avec \quad \tilde{n}_1 = \dfrac{n_1}{m} \in \mathbf{N} \\ Q_{n_2}(\vartheta_1) = \tilde{Q}_{\tilde{n}_2}(\zeta) = 0 \quad avec \quad \tilde{n}_2 = \dfrac{n_2}{m} \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Alors l'algorithme s'applique sur le système réduit, si bien que le terme donne la solution :

$$\vartheta_1^{\ m} = -\frac{b(\vartheta_0)}{a(\vartheta_0)} \quad et \quad \vartheta_0 \quad racine\ de \quad a(\vartheta_0)d(\vartheta_0) = b(\vartheta_0)c(\vartheta_0)$$

L'application de cet algorithme au système de départ dont nous rappelons les degrés respectifs en ϑ_0 et ϑ_1 donne les fractions et équations polynomiales suivantes, suivant les valeurs de N aussi bien avec le choix de ϑ_1 que de ϑ_0 :

$$\begin{cases} P_{n_{1,0},n_{1,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0 \\ Q_{n_{2,0},n_{2,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0 \end{cases} \quad avec \quad n_{1,0}=N+1 \quad n_{1,1}=\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor \quad n_{2,0}=N \quad n_{1,1}=\left\lfloor \frac{N+3}{2} \right\rfloor$$

$$N=1 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_3(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_2(\vartheta_0)}{R_0} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_3(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_0}{R_1(\vartheta_1)}$$

$$N=2 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_6(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_3(\vartheta_0)}{R_1(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_6(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_2(\vartheta_1)}{R_3(\vartheta_1)}$$

$$N=3 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{10}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_5(\vartheta_0)}{R_3(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{10}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_5(\vartheta_1)}{R_6(\vartheta_1)}$$

$$N=4 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{15}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_8(\vartheta_0)}{R_6(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{15}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_9(\vartheta_1)}{R_{10}(\vartheta_1)}$$

$$N=5 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{21}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{12}(\vartheta_0)}{R_{10}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{21}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{14}(\vartheta_1)}{R_{15}(\vartheta_1)}$$

$$N=6 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{28}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{17}(\vartheta_0)}{R_{15}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{28}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{20}(\vartheta_1)}{R_{21}(\vartheta_1)}$$

$$N=7 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{36}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{23}(\vartheta_0)}{R_{21}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{36}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{27}(\vartheta_1)}{R_{28}(\vartheta_1)}$$

$$N=8 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{45}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{30}(\vartheta_0)}{R_{28}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{45}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{35}(\vartheta_1)}{R_{36}(\vartheta_1)}$$

$$N=9 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{55}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{38}(\vartheta_0)}{R_{36}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{55}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{44}(\vartheta_1)}{R_{45}(\vartheta_1)}$$

$$N=10 \to \vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{66}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{47}(\vartheta_0)}{R_{45}(\vartheta_0)} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{66}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{54}(\vartheta_1)}{R_{55}(\vartheta_1)}$$

De ces résultats, on peut établir les puissances des polynômes dont ϑ_1 autant que ϑ_0 sont racines :

$$\begin{cases} P_{n_{1,0},n_{1,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0 \\ Q_{n_{2,0},n_{2,1}}(\vartheta_0,\vartheta_1)=0 \end{cases} \quad avec \quad n_{1,0}=N+1 \quad n_{1,1}=\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor \quad n_{2,0}=N \quad n_{1,1}=\left\lfloor \frac{N+3}{2} \right\rfloor$$

$$\vartheta_0 \quad racine\ de \quad P_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}(\vartheta_0)=0 \quad \vartheta_1=\frac{Q_{2+\frac{N(N-1)}{2}}(\vartheta_0)}{R_{\frac{N(N-1)}{2}}} \Leftrightarrow \vartheta_1 \quad racine\ de \quad P_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}(\vartheta_1)=0 \quad \vartheta_0=\frac{Q_{\frac{N(N+1)}{2}-1}}{R_{\frac{N(N+1)}{2}}(\vartheta_1)}$$

Quelques exemples de polynômes de degré 1, 2, 3 et 4 :

Pour un polynôme de degré 1 on peut facilement obtenir une expression analytique complète sans substituer une valeur numérique aux paramètres . Comme ici $d_0 = 1 \quad d_1 = -\frac{\widetilde{C}_0}{\widetilde{D}_0} = -\frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma}$ *, alors en partant du système des deux équations :* $\begin{cases} \widetilde{B}_1\,d_0 + \widetilde{C}_1\,d_1 = 0 \\ \widetilde{A}_2\,d_0 + \widetilde{B}_2\,d_1 = 0 \end{cases}$*, il vient :*

$$\begin{cases} \widetilde{C}_0 = \vartheta_0 \quad \widetilde{D}_0 = a\,b\,\gamma \\ \widetilde{B}_1 = \vartheta_1 \quad \widetilde{C}_1 = \vartheta_0 - (\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) \qquad et \qquad \zeta = \alpha - (\gamma+\delta+\varepsilon) \\ \widetilde{A}_2 = -\alpha\,\beta = \alpha \quad B_2 = \vartheta_1 + \alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \widetilde{C}_0 & \widetilde{D}_0 \\ \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{B}_1\,d_0 + \widetilde{C}_1\,d_1 = 0 \Leftrightarrow \vartheta_1 = \widetilde{C}_1 \times \frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} = \frac{\vartheta_0(\vartheta_0 - (\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta))}{a\,b\,\gamma}$$

$$\widetilde{A}_2\,d_0 + \widetilde{B}_2\,d_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \times (\vartheta_1 + (\alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \times \left(\frac{\vartheta_0(\vartheta_0 - (\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta))}{a\,b\,\gamma} + \alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta \right) - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \vartheta_0^{\,3} - \vartheta_0^{\,2}\,(\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) + \vartheta_0 a\,b\,\gamma\,(\alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta) - \alpha\,a^2 b^2 \gamma^2 = 0$$

$$De\ plus \quad \begin{cases} \gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta = \gamma\,b\,(1+a) + a\,(\alpha - (\delta+\varepsilon)) + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta \\ \alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta = \alpha\,(1+a) - \delta - a\,\varepsilon + b\,(\gamma+\delta+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta_0^{\,3} - \vartheta_0^{\,2}\,(\gamma\,b\,(1+a) + a\,(\alpha - (\delta+\varepsilon)) + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) + \vartheta_0 a\,b\,\gamma\,(\alpha\,(1+a) - \delta - a\,\varepsilon + b\,(\gamma+\delta+\varepsilon)) - \alpha\,a^2 b^2 \gamma^2 = 0 \\ \vartheta_1 = \frac{\vartheta_0(\vartheta_0 - (\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta))}{a\,b\,\gamma} \Leftrightarrow \vartheta_1 = \delta + a\,\varepsilon - b\,(\gamma+\delta+\varepsilon) + \alpha \left(\frac{a\,b\,\gamma}{\vartheta_0} - 1 - a \right) \end{cases}$$

Finalement : ϑ_0 *est racine d'un équation cubique,* ϑ_1 *est fonction du carré de* ϑ_0 *et la solution est le polynôme :* $y(z) = 1 - \frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma} \times z$ *. Lorsque α=0, on retombe sur la solution « simplifiée » décrite précédemment, à savoir :*

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \vartheta_0^{\,3} - \vartheta_0^{\,2}\,(\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) + \vartheta_0 a\,b\,\gamma\,(\alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta) = 0$$

$$Comme \quad \vartheta_0 \neq 0 \rightarrow \vartheta_0^{\,2} - \vartheta_0\,(\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta) + a\,b\,\gamma\,(\alpha\,(1+a+b) - \delta - a\,\varepsilon - b\,\zeta) = 0$$

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \frac{\vartheta_0^{\,2} - \vartheta_0\,(\gamma\,(a+b+a\,b) + a\,\zeta + b\,\varepsilon + a\,b\,\delta)}{a\,b\,\gamma} = \delta + a\,\varepsilon + b\,\zeta = \delta + a\,\varepsilon - b(\gamma+\delta+\varepsilon) \\ \vartheta_0^{\,2} + \vartheta_0\,(a\,(\delta+\varepsilon) - b(\gamma+\varepsilon) - a\,b\,(\gamma+\delta)) - a\,b\,\gamma\,\vartheta_1 = 0 \end{cases}$$

S'agissant maintenant d'un polynôme de degré 2, voici quelques exemples de solutions avec des paramètres déterminés :

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3 γ=1 δ=2 ϵ=3 ζ=-10 α=-3 β=-2

Θ_0 racines de l'équation $-663552 + 370656\,\Theta_0 - 18864\,\Theta_0^2 - 10440\,\Theta_0^3 + 1524\,\Theta_0^4 - 70\,\Theta_0^5 + \Theta_0^6 == 0$

Liste des racines : $\{\Theta_0 \to -5.35574, \Theta_0 \to 2.29763, \Theta_0 \to 7.35202, \Theta_0 \to 10.5714, \Theta_0 \to 19.4336, \Theta_0 \to 35.7011\}$

$\Theta_1[\Theta_0] = \frac{-864 + 600\,\Theta_0 - 58\,\Theta_0^2 + \Theta_0^3}{6\,(-46 + 5\,\Theta_0)}$

Θ_0=-5.35574 Θ_1=13.4992 -> Polynôme=1 + 0.892623 x + 0.0830377 x^2 -> Respect E.D -> 0

Θ_0=2.29763 Θ_1=-1.06495 -> Polynôme=1 - 0.382939 x - 0.110436 x^2 -> Respect E.D -> 0

Θ_0=7.35202 Θ_1=-14.6029 -> Polynôme=1 - 1.22534 x + 0.37115 x^2 -> Respect E.D -> 0

Θ_0=10.5714 Θ_1=4.33773 -> Polynôme=1 - 1.76191 x - 0.285613 x^2 -> Respect E.D -> 0

Θ_0=19.4336 Θ_1=-12.2766 -> Polynôme=1 - 3.23893 x + 1.51473 x^2 -> Respect E.D -> 0

Θ_0=35.7011 Θ_1=-9.89248 -> Polynôme=1 - 5.95018 x + 6.28825 x^2 -> Respect E.D -> 0

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3 $\gamma=1$ $\delta=2$ $\epsilon=3$ $\zeta=-\frac{34}{5}$ $\alpha=\frac{1}{5}$ $\beta=-2$

θ_0 racines de l'équation $\frac{17\,169\,408}{125}-\frac{76\,127\,904\,\theta_0}{125}+\frac{35\,031\,312\,\theta_0^2}{125}-\frac{5\,714\,856\,\theta_0^3}{125}+\frac{15\,908\,\theta_0^4}{5}-\frac{478\,\theta_0^5}{5}+\theta_0^6==0$

Liste des racines : $\{\theta_0\to 0.254017,\ \theta_0\to 4.15015,\ \theta_0\to 7.67578,\ \theta_0\to 16.2425,\ \theta_0\to 24.3382,\ \theta_0\to 42.9393\}$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-1440-22\,488\,\theta_0+1930\,\theta_0^2-25\,\theta_0^3}{8820-750\,\theta_0}$$

$\theta_0=0.254017$ $\theta_1=-0.814441$ -> Polynôme=$1-0.0423361\,x+0.00192542\,x^2$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=4.15015$ $\theta_1=-11.0933$ -> Polynôme=$1-0.691691\,x+0.0515331\,x^2$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=7.67578$ $\theta_1=-23.3902$ -> Polynôme=$1-1.2793\,x+0.402946\,x^2$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=16.2425$ $\theta_1=-10.5126$ -> Polynôme=$1-2.70708\,x+0.194667\,x^2$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=24.3382$ $\theta_1=-24.8109$ -> Polynôme=$1-4.05637\,x+2.03744\,x^2$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=42.9393$ $\theta_1=-26.1786$ -> Polynôme=$1-7.15655\,x+8.40815\,x^2$ -> Respect E.D -> 0.

Voici un exemple de solution polynomiale de degré 3 avec des paramètres déterminés :

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3 $\gamma=1$ $\delta=2$ $\epsilon=3$ $\zeta=-\frac{55}{7}$ $\alpha=\frac{1}{7}$ $\beta=-3$

θ_0 racines de l'équation $\frac{35\,644\,805\,255\,736\,576}{117\,649}-\frac{142\,482\,759\,704\,828\,352\,\theta_0}{117\,649}+\frac{11\,293\,992\,798\,084\,576\,\theta_0^2}{16\,807}-\frac{18\,624\,627\,460\,339\,632\,\theta_0^3}{117\,649}+\frac{2\,351\,508\,115\,255\,416\,\theta_0^4}{117\,649}-\frac{24\,936\,113\,665\,944\,\theta_0^5}{16\,807}+\frac{23\,060\,583\,180\,\theta_0^6}{343}-\frac{640\,027\,596\,\theta_0^7}{343}+\frac{1\,504\,642\,\theta_0^8}{49}-\frac{1910\,\theta_0^9}{7}+\theta_0^{10}==0$

Liste des racines : $\{\theta_0\to 0.295316,\ \theta_0\to 4.62813,\ \theta_0\to 8.3094,\ \theta_0\to 11.7595,\ \theta_0\to 15.8332,\ \theta_0\to 24.1754,\ \theta_0\to 33.2778,\ \theta_0\to 42.2755,\ \theta_0\to 53.3757,\ \theta_0\to 78.927\}$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-1\,323\,114\,912-14\,134\,893\,552\,\theta_0+2\,311\,467\,564\,\theta_0^2-124\,297\,810\,\theta_0^3+2\,360\,526\,\theta_0^4-12\,005\,\theta_0^5}{6\,232\,441\,824-1\,070\,214\,684\,\theta_0+57\,673\,392\,\theta_0^2-878\,766\,\theta_0^3}$$

$\theta_0=0.295316$ $\theta_1=-0.894884$ -> Polynôme=$1-0.0492193\,x+0.0044937\,x^2-0.000198991\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=4.62813$ $\theta_1=-11.7381$ -> Polynôme=$1-0.771355\,x+0.114413\,x^2-0.0065296\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=8.3094$ $\theta_1=-24.1128$ -> Polynôme=$1-1.3849\,x+0.544434\,x^2-0.0463452\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=11.7595$ $\theta_1=-39.187$ -> Polynôme=$1-1.95992\,x+1.26317\,x^2-0.268032\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=15.8332$ $\theta_1=-10.187$ -> Polynôme=$1-2.63887\,x+0.374702\,x^2-0.0205361\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=24.1754$ $\theta_1=-24.9441$ -> Polynôme=$1-4.02924\,x+2.36391\,x^2-0.208102\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=33.2778$ $\theta_1=-41.7174$ -> Polynôme=$1-5.54631\,x+5.66504\,x^2-1.60398\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=42.2755$ $\theta_1=-25.5605$ -> Polynôme=$1-7.04592\,x+8.69512\,x^2-0.785342\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=53.3757$ $\theta_1=-43.8676$ -> Polynôme=$1-8.89595\,x+15.5758\,x^2-6.16022\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

$\theta_0=78.927$ $\theta_1=-46.362$ -> Polynôme=$1-13.1545\,x+36.2657\,x^2-26.5799\,x^3$ -> Respect E.D -> 0

Et enfin un exemple de solution polynomiale de degré 4 avec des paramètres déterminés :

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3 $\gamma=1$ $\delta=2$ $\epsilon=3$ $\zeta=-\frac{61}{7}$ $\alpha=\frac{2}{7}$ $\beta=-4$

ϑ_0 racines de l'équation

$$-\frac{26621264001143450289103699968}{40353607}+\frac{351878782673669362863971696640\,\vartheta_0}{282475249}-\frac{190468253027367467651971989504\,\vartheta_0^2}{282475249}+\frac{51148951246421930082297323520\,\vartheta_0^3}{282475249}-\frac{8210069072814329109636894720\,\vartheta_0^4}{282475249}+\frac{862035232479333726557263104\,\vartheta_0^5}{282475249}-\frac{1270582643628848643883200\,\vartheta_0^6}{5764801}+\frac{64996249948409438974944\,\vartheta_0^7}{5764801}-\frac{341875620035318316816\,\vartheta_0^8}{823543}+\frac{1302173331968433672\,\vartheta_0^9}{117649}-\frac{3579768826475736\,\vartheta_0^{10}}{16807}+\frac{1000502648316\,\vartheta_0^{11}}{343}-27612244\,\vartheta_0^{12}+\frac{1197330\,\vartheta_0^{13}}{7}-\frac{4350\,\vartheta_0^{14}}{7}+\vartheta_0^{15}==0$$

Liste des racines : $\{\vartheta_0\to 0.828661,\ \vartheta_0\to 5.38954,\ \vartheta_0\to 9.11464,\ \vartheta_0\to 12.5844,\ \vartheta_0\to 15.8946,\ \vartheta_0\to 16.1219,\ \vartheta_0\to 24.6457,\ \vartheta_0\to 33.8407,\ \vartheta_0\to 42.4191,\ \vartheta_0\to 43.4014,\ \vartheta_0\to 53.6848,\ \vartheta_0\to 66.4771,\ \vartheta_0\to 78.9718,\ \vartheta_0\to 92.4715,\ \vartheta_0\to 125.583\}$

$$\vartheta_1[\vartheta_0]=\frac{-2240980454569328640-7413211880442564480\,\vartheta_0+1826924424249800736\,\vartheta_0^2-176056905779014848\,\vartheta_0^3+8624071655122560\,\vartheta_0^4-227945988792256\,\vartheta_0^5+3198453546722\,\vartheta_0^6-21484119188\,\vartheta_0^7+50236123\,\vartheta_0^8}{42\left(87570894790155456-21807443051045232\,\vartheta_0+2156332737799464\,\vartheta_0^2-106445033223004\,\vartheta_0^3+2720372611698\,\vartheta_0^4-34037906154\,\vartheta_0^5+162943865\,\vartheta_0^6\right)}$$

$\vartheta_0=0.828661$ $\vartheta_1=-2.4258$ -> Polynôme=$1-0.13811\,x+0.0219909\,x^2-0.00212852\,x^3+0.0000908243\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=5.38954$ $\vartheta_1=-13.6057$ -> Polynôme=$1-0.898257\,x+0.223249\,x^2-0.0274381\,x^3+0.00136964\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=9.11464$ $\vartheta_1=-25.9814$ -> Polynôme=$1-1.51911\,x+0.737164\,x^2-0.126082\,x^3+0.00775102\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=12.5844$ $\vartheta_1=-41.0327$ -> Polynôme=$1-2.0974\,x+1.53605\,x^2-0.445966\,x^3+0.0381634\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=15.8946$ $\vartheta_1=-58.9202$ -> Polynôme=$1-2.6491\,x+2.60106\,x^2-1.1227\,x^3+0.179872\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=16.1219$ $\vartheta_1=-11.4916$ -> Polynôme=$1-2.68698\,x+0.6524\,x^2-0.0774587\,x^3+0.00374622\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=24.6457$ $\vartheta_1=-26.5676$ -> Polynôme=$1-4.10762\,x+2.83121\,x^2-0.511575\,x^3+0.0317983\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=33.8407$ $\vartheta_1=-43.4269$ -> Polynôme=$1-5.64012\,x+6.33784\,x^2-2.33228\,x^3+0.212857\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=42.4191$ $\vartheta_1=-26.6899$ -> Polynôme=$1-7.06985\,x+9.31538\,x^2-1.76745\,x^3+0.110115\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=43.4014$ $\vartheta_1=-62.8899$ -> Polynôme=$1-7.23357\,x+11.3097\,x^2-6.57545\,x^3+1.30634\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=53.6848$ $\vartheta_1=-45.3119$ -> Polynôme=$1-8.94747\,x+16.4699\,x^2-7.99666\,x^3+0.770143\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=66.4771$ $\vartheta_1=-66.0115$ -> Polynôme=$1-11.0795\,x+26.7125\,x^2-20.7696\,x^3+5.08627\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=78.9718$ $\vartheta_1=-47.3532$ -> Polynôme=$1-13.162\,x+37.2912\,x^2-30.3284\,x^3+3.10676\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=92.4715$ $\vartheta_1=-69.3208$ -> Polynôme=$1-15.4119\,x+52.9129\,x^2-59.7722\,x^3+19.43\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

$\vartheta_0=125.583$ $\vartheta_1=-73.2567$ -> Polynôme=$1-20.9304\,x+99.8654\,x^2-165.362\,x^3+88.0338\,x^4$ -> Respect E.D -> 0

Lien avec les solutions hypergéométriques généralisées

Une question peut alors se poser : parmi ces solutions polynomiales de degré N, de récurrence à quatre termes, existe-t-il des solutions de nature hypergéométrique généralisée, c'est à dire également des solutions polynomiales avec une récurrence à deux termes.

Partons de la situation la plus simple, soit que la solution recherchée soit un polynôme de degré 1, alors, l'on retrouve l'une des expressions de ϑ_0 en fonction des paramètres $e_1,e_2,\ldots,e_{\tilde{N}}$:

$$y(z)=1+d_1 z={}_{\tilde{N}+2}F_{\tilde{N}+1}\left(\alpha,-1,1+e_1,\ldots,1+e_{\tilde{N}}\,;\gamma,e_1,\ldots,e_{\tilde{N}}\,;\sigma\,z\right)=1+\frac{\alpha\times\beta\times\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}(1+e_l)}{\gamma\times\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}e_l}\times\sigma\times z$$

$$\sigma_0=-\sigma\,a\,b\quad \beta=-1\quad d_1=-\frac{\vartheta_0}{a\,b\,\gamma}=\frac{\alpha\times\beta\times\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}(1+e_l)}{\gamma\times\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}e_l}\times\sigma\Rightarrow\vartheta_0=\alpha\,\sigma\,a\,b\,\frac{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}e_l}=-\alpha\,\sigma_0\,\frac{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}(1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}}e_l}$$

De même que l'on retrouve également l'équation du troisième degré dont ϑ_0 est racine, ainsi que la valeur de ϑ_1 en fonction de ϑ_0 . Aussi l'une des équations permettant de déterminer les coefficients $e_1, e_2, \ldots, e_{\tilde{N}}$ est : $\vartheta_0 = -\alpha\,\sigma_0 \dfrac{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}} (1+e_l)}{\prod_{l=1}^{l=\tilde{N}} e_l} \Leftrightarrow s_{\tilde{N}} \vartheta_0 = -\alpha\,\sigma_0 \left(1 + s_1 + \ldots + s_{\tilde{N}}\right)$ *. De même parmi les N+5 équations linéaires en $s_1, s_2, \ldots, s_{\tilde{N}}$:* $\sum_{l=0}^{l=N+4} T_l\, j^l = 0 \Rightarrow T_l = 0 \quad l \in \{0,1,\ldots,N+4\}$ *, comme la solution est un polynôme de degré 1, il ne peut en subsister uniquement que les deux premières (termes en j^0 et j^1). Cela ne peut aboutir qu'à un système linéaire sous-déterminé, sauf si* $s_{\tilde{N}} = 0$ *. Pour $\tilde{N} > 2$ l'équation* $s_{\tilde{N}} \vartheta_0 = -\alpha\,\sigma_0 \left(1 + s_1 + \ldots + s_{\tilde{N}}\right)$ *ne permet pas la détermination du paramètre ϑ_0 hormis par une solution triviale pour laquelle justement :* $s_{\tilde{N}} = 0 \quad et \quad s_1 + \ldots + s_{\tilde{N}-1} = -1$ *. Or cette solution implique que deux quelconques des e_i soient respectivement égale à -1 et 0 . En effet comme les $-e_i$ sont racines de l'équation polynomiale, il vient :*

$$z^{\tilde{N}} + \sum_{l=1}^{l=\tilde{N}-1} s^l z^{\tilde{N}-l} + s_{\tilde{N}} = 0 \Rightarrow e_1 = 0 \quad et \quad z^{\tilde{N}-1} + \sum_{l=1}^{l=\tilde{N}-1} s_l z^{\tilde{N}-l-1} = z^{\tilde{N}-1} + \sum_{l=1}^{l=\tilde{N}-2} s_l z^{\tilde{N}-l-1} + s_{\tilde{N}-1} = 0$$

$$De\ plus \quad s_1 + \ldots + s_{\tilde{N}-1} = -1 \Rightarrow z^{\tilde{N}-1} - 1 + \sum_{l=1}^{l=\tilde{N}-2} s_l \left(z^{\tilde{N}-l-1} - 1\right) = 0$$

$$Or \quad \frac{z^{\tilde{N}-1} - 1}{z - 1} = 1 + z + \ldots + z^{\tilde{N}-2} \quad et \quad \frac{z^{\tilde{N}-l-1} - 1}{z - 1} = 1 + z + \ldots + z^{\tilde{N}-l-2}$$

Les deux dernières expressions indiquent que z=1 est également une racine de l'équation polynomiale, et finalement il y a bien un des coefficients égale 0 et l'autre à -1. Admettons pour simplifier que ce soit e_1=0 et e_2=-1, alors la forme de la solution hyper-géométrique généralisée devient : ${}_{\tilde{N}+2}F_{\tilde{N}+1}\left(\alpha,-1,1,0,1+e_3,\ldots,1+e_{\tilde{N}};\gamma,0,-1,e_3,\ldots,e_{\tilde{N}};\sigma z\right) = {}_{\tilde{N}}F_{\tilde{N}-1}\left(\alpha,1,1+e_3,\ldots,1+e_{\tilde{N}};\gamma,e_3,\ldots,e_{\tilde{N}};\sigma z\right)$ *, ce qui n'est plus la fonction hyper-géométrique généralisée recherchée.*

En revanche pour $\widetilde{N} = 2$, le système linéaire des deux équations en s_1,s_2 est parfaitement déterminé. Si par ailleurs l'on reproduit le raisonnement pour l'équation du second degré dont les deux coefficients e_1, e_2 sont racines, elle se factoriserait en z(z-1)=0. Or c'est en contradiction avec le fait que s_1 et s_2 sont bien déterminés et donc non triviaux (s_2 =0 et s_1 =-1) . Plus précisément le système linéaire se présente ainsi :

$$\begin{cases} 6a\alpha\left(2b^2(\gamma-1)(\gamma-2)+(\alpha-2)(\vartheta_0+\alpha\, a)+b(1+a)(\gamma-1)(\alpha-2)+b(\gamma-2)\vartheta_1\right)s_1+ \\ +\begin{pmatrix} a\alpha\left(6a(\alpha-2)(\alpha-1-b(\gamma-2))+2b(\gamma-2)(6-3\alpha+b(5\gamma-9))\right)-3(\alpha-2)\vartheta_0^{\;2}+ \\ +3ab\alpha(\gamma-2)\vartheta_1+\vartheta_0\left(b(5\gamma-7)(\alpha-2-2b(\gamma-2))+a(\alpha-2)(b(5\gamma-7)-3\alpha)-4b(\gamma-2)\vartheta_1\right) \end{pmatrix} s_2=0 \\ \alpha\,\sigma_0 s_1+\left(\vartheta_0+\alpha\,\sigma_0\right)s_2=-\alpha\,\sigma_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1=\sigma_0\times\begin{pmatrix} -6a^2\alpha(\alpha-2)(\alpha-1-b(\gamma-2))+\vartheta_0\left(-b(\alpha-2)(5\gamma-7)+2b^2(\gamma-2)(5\gamma-7)+3(\alpha-2)\vartheta_0+4b(\gamma-2)\vartheta_1\right)+ \\ +a\left(-2b^2\alpha(\gamma-2)(5\gamma-9)+3\alpha(\alpha-2)\vartheta_0+b(\alpha-2)(6\alpha(\gamma-2)-\vartheta_0(5\gamma-7))-3b\alpha(\gamma-2)\vartheta_1\right) \end{pmatrix} \\ N_2=6a\alpha\sigma_0\left(2b^2(\gamma-1)(\gamma-2)-(1+a)b(\alpha-2)(\gamma-1)+(\alpha-2)(a\alpha+\vartheta_0)+b(\gamma-2)\vartheta_1\right) \\ D=6a\vartheta_0\left((1+a)b(\alpha-2)(\gamma-1)-2b^2(\gamma-1)(\gamma-2)-(\alpha-2)(a\alpha+\vartheta_0)-b(\gamma-2)\vartheta_1\right)+ \\ \sigma_0\times\begin{pmatrix} 6a^2(b-1)\alpha(\alpha-2)+\vartheta_0\left(b(\alpha-2)(5\gamma-7)-2b^2(\gamma-2)(5\gamma-7)-3(\alpha-2)\vartheta_0-4b(\gamma-2)\vartheta_1\right)+ \\ +a\left(-2b^2\alpha(\gamma-2)(\gamma+3)-9\alpha(\alpha-2)\vartheta_0+b(\alpha-2)(6\alpha+\vartheta_0(5\gamma-7))-3b\alpha(\gamma-2)\vartheta_1\right) \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow s_1=\frac{N_1}{D} \quad et \quad s_2=\frac{N_2}{D}$$

Le système linéaire précédent se simplifie lorsque α=2 et γ=1, on peut en tirer des expressions littérales plus simples de s_1, s_2 :

$$\begin{cases} 12ab\vartheta_1\, s_1-2b\left(2\vartheta_0\vartheta_1-3a\vartheta_1-2b\vartheta_0+8ab\right)s_2=0 \\ 2\,\sigma_0 s_1+\left(\vartheta_0+2\,\sigma_0\right)s_2=-2\,\sigma_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=\sigma_0\times\dfrac{2b\vartheta_0+3a\vartheta_1-8ab-2\vartheta_0\vartheta_1}{8ab\sigma_0+2\vartheta_0\sigma_0(\vartheta_1-b)+3a\vartheta_1(\vartheta_0+\sigma_0)} \\ s_2=-\dfrac{6a\sigma_0\vartheta_1}{8ab\sigma_0+2\vartheta_0\sigma_0(\vartheta_1-b)+3a\vartheta_1(\vartheta_0+\sigma_0)} \end{cases}$$

Combiné avec les expressions littérales du polynôme de degré 3 dont ϑ_0 est racine et de ϑ_1, le polynome $y(z)=1+d_1 z$ est parfaitement déterminé :

$$\begin{cases} \vartheta_1=\dfrac{\vartheta_0\left(\vartheta_0-b(\gamma+\varepsilon)-a\left(\alpha-\delta-\varepsilon+b(\gamma+\delta)\right)\right)}{a\,b\,\gamma} \\ \vartheta_0^{\;3}+\left(a(\varepsilon-b(\gamma+\delta)+\delta-\alpha)-b(\gamma+\varepsilon)\right)\vartheta_0^{\;2}+ab\gamma\left(\alpha-\delta+a(\alpha-\varepsilon)+b(\gamma+\delta+\varepsilon)\right)\vartheta_0-a^2b^2\alpha\,\gamma^2=0 \end{cases}$$

Remarque : au passage on voit que la solution polynomiale de degré 1 qui est également par nature une fonction hyper-géométrique généralisée de la forme : $y(z)={}_4F_3(\alpha,-1,1+e_1,1+e_2;\gamma,e_1,e_2\,;\sigma\, z)$ *ne nécessite pas les contraintes* $\delta+\varepsilon=-2 \quad \sigma=\frac{1}{b} \quad ou \quad \delta+\zeta=-2 \quad \sigma=\frac{1}{a} \quad ou \quad \varepsilon+\zeta=-2 \quad \sigma=1$ *car une solution existe quelque soit les valeurs des paramètres* $a,b,\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\sigma_0,\sigma=-\frac{\sigma_0}{a\,b}$.

Plus généralement, hormis le cas d'une solution polynomiale de degré 1 dont la correspondance est uniquement établie pour le cas $\widetilde{N}=2$*, l'algorithme de construction des solutions hyper-géométriques généralisée a montré que* ϑ_0 *était racine d'un « PGCD polynomial ». Il se trouve que ce « PGCD polynomial » est souvent le produit de plusieurs polynômes. Supposons que tel est le cas et que* ϑ_0 *soit racine d'un de ces polynômes. On constate alors que les paramètres calculés de la solution hypergéométrique généralisée conduisent à une évaluation qui n'est plus une solution de type* ${}_{N+2}F_{N+1}$ *mais de degré moindre, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. En effet dans ce cas on voit que* $s_{\widetilde{N}}=0$ *et comme nous le remarquions précédemment pour que* ϑ_0 *existe d'après l'équation* $s_{\widetilde{N}}\vartheta_0=-\alpha\,\sigma_0\left(1+s_1+\ldots+s_{\widetilde{N}}\right)$ *il est nécessaire que* $s_1+\ldots+s_{\widetilde{N}-1}=-1$ *. Cela conduit à ce que le facteur z(z-1) se factorise dans l'équation polynomiale de détermination des* e_i *et donc que deux de ces coefficients soient respectivement égale à -1 et 0 . Admettons pour simplifier que ce soit* $e_1=0$ *et* $e_2=-1$*, alors la forme de la solution hyper-géométrique généralisée devient :* ${}_{\widetilde{N}+2}F_{\widetilde{N}+1}\left(\alpha,-1,1,0,1+e_3,\ldots,1+e_{\widetilde{N}};\gamma,0,-1,e_3,\ldots,e_{\widetilde{N}};\sigma z\right)={}_{\widetilde{N}}F_{\widetilde{N}-1}\left(\alpha,1,1+e_3,\ldots,1+e_{\widetilde{N}};\gamma,e_3,\ldots,e_{\widetilde{N}};\sigma z\right)$ *, ce qui n'est plus la fonction hyper-géométrique généralisée recherchée, ni d'ailleurs un polynôme en général.*

Par la construction directe de la solution polynomiale cela conduit à un autre polynôme en ϑ_0 *dont ce dernier soit la racine. Il suffit donc de réaliser une opération de PGCD entre le polynôme issue de la construction hypergéométrique généralisée et celui de la construction directe des solutions polynomiales. Et si nous constatons qu'il y a bien un polynôme en commun alors ce sont les seules solutions admissibles hypergéométriques généralisées de récurrence à deux termes qui soient en correspondance avec les solutions polynomiales de récurrence à 4 termes.*

Autrement dit de ce l'on peut constater, à toute solution hypergéométrique généralisée de nature polynomiale, peut correspondre une solution polynomiale dont la récurrence est à 4 termes et inversement. A savoir :

$$\begin{cases}{}_{\widetilde{N}+2}F_{\widetilde{N}+1}\left(\alpha,\beta,1+e_1,\ldots,1+e_{\widetilde{N}};\gamma,e_1,\ldots,e_{\widetilde{N}};\sigma z\right)\\ 1+\alpha+\beta=\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta\Leftrightarrow 1+\alpha-\widetilde{N}=\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta\end{cases}\quad avec\quad \begin{cases}\delta+\varepsilon=-\widetilde{N}\\ \sigma=\dfrac{1}{b}\\ 1+\alpha=\gamma+\zeta\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}\delta+\zeta=-\widetilde{N}\\ \sigma=\dfrac{1}{a}\\ 1+\alpha=\gamma+\varepsilon\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}\varepsilon+\zeta=-\widetilde{N}\\ \sigma=1\\ 1+\alpha=\gamma+\delta\end{cases}$$

$$N=1\quad \widetilde{N}=2\quad \beta=-1\quad \exists\left(e_1,e_2\right)\quad tq\quad y(z)=1+d_1z={}_4F_3\left(\alpha,-1,1+e_1,1+e_2;\gamma,e_1,\ldots,e_2;\sigma z\right)$$

$$N>1\quad \widetilde{N}\geq 2\quad \exists\,\beta=-N\quad \exists\left(e_1,\ldots,e_{\widetilde{N}}\right)\quad tq\quad y(z)=\sum_{l=0}^{l=N}d_lz^l={}_{\widetilde{N}+2}F_{\widetilde{N}+1}\left(\alpha,-N,1+e_1,\ldots,1+e_{\widetilde{N}};\gamma,e_1,\ldots,e_{\widetilde{N}};\sigma z\right)$$

La question est aussi de savoir si les contraintes imposées lors de la construction des solutions hypergéométriques généralisées peuvent être levées. On a vu que pour $\beta=-1$*, aucune contrainte n'était nécessaire.*

Voici quelques exemples de correspondance :

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 2, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_4F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=1$ $\delta=-1$ $\epsilon=-1$ $\zeta=\frac{1}{2}$ $\alpha=\frac{1}{2}$ $\beta=-2$

θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale $->(-12+\theta_0)\ (-6+\theta_0)\ \left(684-441\,\theta_0+114\,\theta_0^2-16\,\theta_0^3+\theta_0^4\right)==0$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-144-120\,\theta_0+31\,\theta_0^2-\theta_0^3}{168-30\,\theta_0}$$

Liste des racines θ_0 : $\{3.11897-4.62713\,i,\ 3.11897+4.62713\,i,\ 3.51796,\ 6.24409\}$

Liste des θ_1 : $\{-3.82985+3.06437\,i,\ -3.82985-3.06437\,i,\ -3.61883,\ -3.72148\}$

Polynôme solution $=1-0.586327\,x+0.163439\,x^2$

θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=2->$684-441\,\theta_0+114\,\theta_0^2-16\,\theta_0^3+\theta_0^4==0$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{5223-2703\,\theta_0+440\,\theta_0^2-26\,\theta_0^3}{-1011+596\,\theta_0-120\,\theta_0^2+9\,\theta_0^3}$$

Liste des racines θ_0 : $\{\theta_0\to 3.11897-4.62713\,i,\ \theta_0\to 3.11897+4.62713\,i,\ \theta_0\to 3.51796,\ \theta_0\to 6.24409\}$

Liste des θ_1 : $\{-3.82985+3.06437\,i,\ -3.82985-3.06437\,i,\ -3.61883,\ -3.72148\}$

Choix $\theta_0=3.51796$ $\theta_1=-3.61883$

s[1]=0.0807371 s[2]=1.42393 e[1]=0.0403686 + 1.1926 i e[2]=0.0403686 − 1.1926 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 3, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_4F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=1$ $\delta=-1$ $\epsilon=-1$ $\zeta=-\frac{1}{2}$ $\alpha=\frac{1}{2}$ $\beta=-3$

θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale $->(-6+\theta_0)\ \left(-6534+1125\,\theta_0-61\,\theta_0^2+\theta_0^3\right)\ \left(-1188+333\,\theta_0-31\,\theta_0^2+\theta_0^3\right)\ \left(-657+192\,\theta_0-22\,\theta_0^2+\theta_0^3\right)==0$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-620136-209358\,\theta_0+102555\,\theta_0^2-11946\,\theta_0^3+494\,\theta_0^4-5\,\theta_0^5}{445500-128574\,\theta_0+12006\,\theta_0^2-366\,\theta_0^3}$$

Liste des racines θ_0 : $\{6.,\ 6.74461-5.63085\,i,\ 6.74461+5.63085\,i,\ 8.51078\}$

Liste des θ_1 : $\{-6.,\ -7.26844+3.60086\,i,\ -7.26844-3.60086\,i,\ -6.46312\}$

Polynôme solution $=1-1.\,x+0.458333\,x^2-0.0694444\,x^3$

θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=2->$(-6+\theta_0)\ \left(-657+192\,\theta_0-22\,\theta_0^2+\theta_0^3\right)==0$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{1000242-391329\,\theta_0+50082\,\theta_0^2-2139\,\theta_0^3}{-98334+42570\,\theta_0-6084\,\theta_0^2+292\,\theta_0^3}$$

Liste des racines θ_0 : $\{\theta_0\to 6.,\ \theta_0\to 6.74461-5.63085\,i,\ \theta_0\to 6.74461+5.63085\,i,\ \theta_0\to 8.51078\}$

Liste des θ_1 : $\{-6.,\ -7.26844+3.60086\,i,\ -7.26844-3.60086\,i,\ -6.46312\}$

Choix $\theta_0=6.$ $\theta_1=-6.$

s[1]=2. s[2]=3. e[1]=1. + 1.41421 i e[2]=1. − 1.41421 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 4, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_4F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=1$ $\delta=-1$ $\epsilon=-1$ $\zeta=-\frac{3}{2}$ $\alpha=\frac{1}{2}$ $\beta=-4$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale ->$-(1472-89\,\Theta_0)^2\,(-18+\Theta_0)\,(-11+\Theta_0)$
$(-1152+315\,\Theta_0-29\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)\,(-20\,992\,896+4\,146\,984\,\Theta_0-306\,545\,\Theta_0^2+10\,518\,\Theta_0^3-168\,\Theta_0^4+\Theta_0^5)\,(-1\,207\,944+378\,486\,\Theta_0-46\,493\,\Theta_0^2+2814\,\Theta_0^3-84\,\Theta_0^4+\Theta_0^5)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{-408\,442\,134\,528-40\,093\,554\,816\,\Theta_0+51\,037\,427\,088\,\Theta_0^2-9\,864\,208\,766\,\Theta_0^3+891\,637\,201\,\Theta_0^4-43\,531\,535\,\Theta_0^5+1\,147\,024\,\Theta_0^6-14\,549\,\Theta_0^7+61\,\Theta_0^8}{217\,137\,328\,128-81\,128\,499\,264\,\Theta_0+12\,289\,872\,300\,\Theta_0^2-966\,405\,342\,\Theta_0^3+41\,569\,740\,\Theta_0^4-925\,692\,\Theta_0^5+8310\,\Theta_0^6}$$

Liste des racines Θ_0 : {7.47699, 10.7615 − 6.18568 i, 10.7615 + 6.18568 i, 11.}

Liste des Θ_1 : {−7.89317, −11.0534 + 3.7522 i, −11.0534 − 3.7522 i, −9.}

Polynôme solution=$1-1.24617\,x+0.769038\,x^2-0.213922\,x^3+0.0219524\,x^4$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=2->$(-11+\Theta_0)\,(-1152+315\,\Theta_0-29\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{-15\,(-35\,640+11\,209\,\Theta_0-1138\,\Theta_0^2+37\,\Theta_0^3)}{2\,(-17\,226+5895\,\Theta_0-652\,\Theta_0^2+23\,\Theta_0^3)}$$

Liste des racines Θ_0 : {$\Theta_0\to$7.47699, $\Theta_0\to$10.7615 − 6.18568 i, $\Theta_0\to$10.7615 + 6.18568 i, $\Theta_0\to$11.}

Liste des Θ_1 : {−7.89317, −11.0534 + 3.7522 i, −11.0534 − 3.7522 i, −9.}

Choix Θ_0=7.47699 Θ_1=−7.89317

s[1]=4.14874 s[2]=5.92321 e[1]=2.07437 + 1.27287 i e[2]=2.07437 − 1.27287 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 3, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_5F_4$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=3$ $\delta=-2$ $\epsilon=-1$ $\zeta=-1$ $\alpha=1$ $\beta=-3$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale ->$5\,(-54+\Theta_0)\,(-21\,384+2286\,\Theta_0-82\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)\,(-11\,448+1702\,\Theta_0-74\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)\,(-8964+1242\,\Theta_0-60\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{-75\,162\,816-15\,093\,216\,\Theta_0+2\,613\,744\,\Theta_0^2-123\,234\,\Theta_0^3+2186\,\Theta_0^4-11\,\Theta_0^5}{26\,523\,936-3\,053\,700\,\Theta_0+115\,668\,\Theta_0^2-1446\,\Theta_0^3}$$

Liste des racines Θ_0 : {11.8678, 18.7224 − 6.84812 i, 18.7224 + 6.84812 i, 22.5552, 30.3771, 31.7552}

Liste des Θ_1 : {−12.3555, −17.058 + 4.01573 i, −17.058 − 4.01573 i, −15.884, −19.2806, −24.3639}

Polynôme solution=$1-1.68761\,x+0.907157\,x^2-0.13801\,x^3$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=3->$(-11\,448+1702\,\Theta_0-74\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)\,(-8964+1242\,\Theta_0-60\,\Theta_0^2+\Theta_0^3)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{14\,948\,489\,088-3\,601\,544\,904\,\Theta_0+340\,815\,600\,\Theta_0^2-15\,939\,750\,\Theta_0^3+369\,746\,\Theta_0^4-3407\,\Theta_0^5}{6\,(-123\,909\,588+29\,362\,014\,\Theta_0-2\,739\,762\,\Theta_0^2+126\,213\,\Theta_0^3-2877\,\Theta_0^4+26\,\Theta_0^5)}$$

Liste des racines Θ_0 : {$\Theta_0\to$11.8678, $\Theta_0\to$18.7224 − 6.84812 i, $\Theta_0\to$18.7224 + 6.84812 i, $\Theta_0\to$22.5552, $\Theta_0\to$30.3771, $\Theta_0\to$31.7552}

Liste des Θ_1 : {−12.3555, −17.058 + 4.01573 i, −17.058 − 4.01573 i, −15.884, −19.2806, −24.3639}

Choix Θ_0=30.3771 Θ_1=−19.2806

s[1]=5.76767 s[2]=3.12294 s[3]=2.4344 e[1]=5.26211 e[2]=0.25278 + 0.631452 i e[3]=0.25278 − 0.631452 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 4, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_5F_4$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=3$ $\delta=-2$ $\epsilon=-1$ $\zeta=-2$ $\alpha=1$ $\beta=-4$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale $\to -(4020-103\,\Theta_0)^2\left(-331776+14652\,\Theta_0-212\,\Theta_0^2+\Theta_0^3\right)\left(-17264+2208\,\Theta_0-84\,\Theta_0^2+\Theta_0^3\right)\left(-20736+2196\,\Theta_0-80\,\Theta_0^2+\Theta_0^3\right)\left(3700007424-562650624\,\Theta_0+35630496\,\Theta_0^2-1204304\,\Theta_0^3+22944\,\Theta_0^4-234\,\Theta_0^5+\Theta_0^6\right)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{-677508183982080-46347633699840\,\Theta_0+18426070273536\,\Theta_0^2-1513068221376\,\Theta_0^3+60443934720\,\Theta_0^4-1343473424\,\Theta_0^5+16678380\,\Theta_0^6-104808\,\Theta_0^7+241\,\Theta_0^8}{6\left(28836884805120-4601790766080\,\Theta_0+302456700000\,\Theta_0^2-10485165744\,\Theta_0^3+202289088\,\Theta_0^4-2060014\,\Theta_0^5+8651\,\Theta_0^6\right)}$$

Liste des racines Θ_0 : {14.1647, 25.884 − 8.03145 i, 25.884 + 8.03145 i, 28.2319, 34.2553, 35.58}

Liste des Θ_1 : {−15.5104, −23.5184 + 4.56541 i, −23.5184 − 4.56541 i, −20.9632, −23.6135, −28.8761}

Polynôme solution $=1-1.90307\,x+1.29501\,x^2-0.359496\,x^3+0.0356055\,x^4$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=3 $\to\left(-17264+2208\,\Theta_0-84\,\Theta_0^2+\Theta_0^3\right)\left(-20736+2196\,\Theta_0-80\,\Theta_0^2+\Theta_0^3\right)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{22-3\,\Theta_0+\frac{7793252352-16\,\Theta_0\,(93082680+\Theta_0\,(-7012756+7\,\Theta_0\,(37276+\Theta_0\,(-686+5\,\Theta_0))))}{85515264+\Theta_0\,(-33188544+\Theta_0\,(4304288+\Theta_0\,(-268288+\Theta_0\,(8824+(-148+\Theta_0)\,\Theta_0))))}}{3}$$

Liste des racines Θ_0 : {$\Theta_0\to$ 14.1647, $\Theta_0\to$ 25.884 − 8.03145 i, $\Theta_0\to$ 25.884 + 8.03145 i, $\Theta_0\to$ 28.2319, $\Theta_0\to$ 34.2553, $\Theta_0\to$ 35.58}

Liste des Θ_1 : {−15.5104, −23.5184 + 4.56541 i, −23.5184 − 4.56541 i, −20.9632, −23.6135, −28.8761}

Choix $\Theta_0=34.2553$ $\Theta_1=-23.6135$

s[1]=7.70739 s[2]=8.4708 s[3]=5.23421 e[1]=6.53349 e[2]=0.58695 + 0.67574 i e[3]=0.58695 − 0.67574 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 2, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_6F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=1$ $\delta=-2$ $\epsilon=-2$ $\zeta=\frac{7}{3}$ $\alpha=\frac{1}{3}$ $\beta=-2$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale $\to 72576-389088\,\Theta_0+114264\,\Theta_0^2-15130\,\Theta_0^3+2013\,\Theta_0^4-342\,\Theta_0^5+27\,\Theta_0^6==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{-20771804049408-7155429622528\,\Theta_0+5637670630144\,\Theta_0^2-1261463126344\,\Theta_0^3+137767912182\,\Theta_0^4-7777060389\,\Theta_0^5+229406715\,\Theta_0^6-3295323\,\Theta_0^7+14823\,\Theta_0^8}{18\left(1194573559808-616484431424\,\Theta_0+117061968296\,\Theta_0^2-10817053158\,\Theta_0^3+503500023\,\Theta_0^4-11560266\,\Theta_0^5+112185\,\Theta_0^6\right)}$$

Liste des racines Θ_0 : {−2.58102 − 6.4786 i, −2.58102 + 6.4786 i, 0.197716, 5.34374 − 3.42112 i, 5.34374 + 3.42112 i, 6.94352}

Liste des Θ_1 : {0.535878 + 4.24654 i, 0.535878 − 4.24654 i, −1.1334, 0.784613 + 1.84278 i, 0.784613 − 1.84278 i, 2.49242}

Polynôme solution $=1-0.0329526\,x+0.0507001\,x^2$

Θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=4 $\to\frac{1}{27}\left(72576-389088\,\Theta_0+114264\,\Theta_0^2-15130\,\Theta_0^3+2013\,\Theta_0^4-342\,\Theta_0^5+27\,\Theta_0^6\right)==0$

$$\Theta_1[\Theta_0]=\frac{2\left(2916205842184747776-541520065529348544\,\Theta_0+2500131748280978128\,\Theta_0^2-5085852302216798100\,\Theta_0^3+1161354097393494768\,\Theta_0^4-88582057103861307\,\Theta_0^5+12459745998767907\,\Theta_0^6-3844275565085793\,\Theta_0^7+359098763525901\,\Theta_0^8\right)}{9\left(-788643128563741440+1300130348455393984\,\Theta_0-825837267465103248\,\Theta_0^2+171583805452197348\,\Theta_0^3-22631278277512332\,\Theta_0^4+2187463899669453\,\Theta_0^5+197131331782827\,\Theta_0^6-96740483554017\,\Theta_0^7+8788433822433\,\Theta_0^8\right)}$$

Liste des racines Θ_0 : {$\Theta_0\to$ −2.58102 − 6.4786 i, $\Theta_0\to$ −2.58102 + 6.4786 i, $\Theta_0\to$ 0.197716, $\Theta_0\to$ 5.34374 − 3.42112 i, $\Theta_0\to$ 5.34374 + 3.42112 i, $\Theta_0\to$ 6.94352}

Liste des Θ_1 : {0.535878 + 4.24654 i, 0.535878 − 4.24654 i, −1.1334, 0.784613 + 1.84278 i, 0.784613 − 1.84278 i, 2.49242}

Choix $\Theta_0=0.197716$ $\Theta_1=-1.1334$

s[1]=−11.9346 s[2]=30.4669 s[3]=−20.56 s[4]=1.20662 e[1]=−0.0647421 e[2]=−0.97908 e[3]=−2.18706 e[4]=−8.70369 $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 3, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_6F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=3$ $\delta=-2$ $\epsilon=-2$ $\zeta=0$ $\alpha=1$ $\beta=-3$

θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale ->

$$5\,(-54+\theta_0)\,(-27+\theta_0)\,\left(414-45\,\theta_0+\theta_0^2\right)\,\left(153\,372\,528-37\,796\,112\,\theta_0+3\,974\,400\,\theta_0^2-228\,324\,\theta_0^3+7525\,\theta_0^4-134\,\theta_0^5+\theta_0^6\right)==0$$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-70\,077\,312-13\,389\,516\,\theta_0+2\,393\,100\,\theta_0^2-115\,995\,\theta_0^3+2114\,\theta_0^4-11\,\theta_0^5}{24\,285\,096-2\,859\,408\,\theta_0+111\,978\,\theta_0^2-1446\,\theta_0^3}$$

Liste des racines θ_0 : {12.8953, 16.7614 − 11.7219 i, 16.7614 + 11.7219 i, 17.3404, 25.4665 − 2.82361 i, 25.4665 + 2.82361 i, 32.1047, 32.2038}

Liste des θ_1 : {−13.2984, −16.4754 + 7.96041 i, −16.4754 − 7.96041 i, −16.322, −16.8027 + 2.53513 i, −16.8027 − 2.53513 i, −19.7016, −19.1218}

Polynôme solution $=1-0.716406\,x+0.245638\,x^2-0.0324609\,x^3$

θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=4->

$$\left(414-45\,\theta_0+\theta_0^2\right)\,\left(153\,372\,528-37\,796\,112\,\theta_0+3\,974\,400\,\theta_0^2-228\,324\,\theta_0^3+7525\,\theta_0^4-134\,\theta_0^5+\theta_0^6\right)==0$$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{6\,\left(-1\,047\,530\,266\,104\,240+328\,695\,276\,200\,256\,\theta_0-42\,979\,915\,572\,192\,\theta_0^2+3\,010\,379\,808\,432\,\theta_0^3-119\,521\,592\,341\,\theta_0^4+2\,534\,503\,428\,\theta_0^5-19\,524\,414\,\theta_0^6-183\,044\,\theta_0^7+3123\,\theta_0^8\right)}{394\,883\,615\,279\,232-133\,547\,144\,998\,608\,\theta_0+19\,214\,201\,366\,496\,\theta_0^2-1\,529\,454\,690\,648\,\theta_0^3+73\,222\,673\,604\,\theta_0^4-2\,140\,622\,777\,\theta_0^5+36\,810\,779\,\theta_0^6-331\,735\,\theta_0^7+1129\,\theta_0^8}$$

Liste des racines θ_0 :
{θ_0 → 12.8953, θ_0 → 16.7614 − 11.7219 i, θ_0 → 16.7614 + 11.7219 i, θ_0 → 17.3404, θ_0 → 25.4665 − 2.82361 i, θ_0 → 25.4665 + 2.82361 i, θ_0 → 32.1047, θ_0 → 32.2038}

Liste des θ_1 : {−13.2984, −16.4754 + 7.96041 i, −16.4754 − 7.96041 i, −16.322, −16.8027 + 2.53513 i, −16.8027 − 2.53513 i, −19.7016, −19.1218}

Choix θ_0=12.8953 θ_1=−13.2984

s[1]=4. s[2]=16.5523 s[3]=51.2094 s[4]=63.3141 e[1]=2.11238 + 0.804173 i e[2]=2.11238 − 0.804173 i e[3]=−0.112378 + 3.51858 i e[4]=−0.112378 − 3.51858 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$

Avec les paramètres suivants, pour une solution polynomiale de degré 4, le polynôme en ϑ_0 et l'expression de ϑ_1 lui correspond une expression de la solution hyper-géométrique ${}_6F_3$:

Points singuliers finis a[1]=0 a[2]=1 a[3]=2 a[4]=3

Paramètres de l'E.D. $\gamma=1$ $\delta=-2$ $\epsilon=-2$ $\zeta=\frac{1}{3}$ $\alpha=\frac{1}{3}$ $\beta=-4$

θ_0 racine du polynôme pour la solution polynomiale ->

$$-(3328-267\,\theta_0)^2\,\left(-52\,848+6462\,\theta_0-251\,\theta_0^2+3\,\theta_0^3\right)\,\left(-7488+1593\,\theta_0-116\,\theta_0^2+3\,\theta_0^3\right)\,\left(-4\,113\,929\,650\,176+2\,618\,904\,719\,360\,\theta_0-740\,162\,473\,472\,\theta_0^2+125\,306\,271\,680\,\theta_0^3-14\,056\,572\,780\,\theta_0^4+1\,098\,440\,352\,\theta_0^5-60\,962\,787\,\theta_0^6+2\,365\,119\,\theta_0^7-59\,049\,\theta_0^8+729\,\theta_0^9\right)==0$$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-17\,840\,981\,901\,312-1\,600\,063\,479\,808\,\theta_0+2\,567\,974\,724\,224\,\theta_0^2-589\,725\,841\,216\,\theta_0^3+65\,990\,784\,618\,\theta_0^4-4\,160\,529\,945\,\theta_0^5+147\,053\,367\,\theta_0^6-2\,575\,071\,\theta_0^7+14\,823\,\theta_0^8}{18\,\left(670\,889\,013\,248-284\,585\,836\,928\,\theta_0+51\,345\,620\,000\,\theta_0^2-5\,057\,365\,530\,\theta_0^3+286\,058\,115\,\theta_0^4-8\,750\,538\,\theta_0^5+112\,185\,\theta_0^6\right)}$$

Liste des racines θ_0 : {5.02326, 5.14761 − 16.4971 i, 5.14761 + 16.4971 i, 6.22809 − 6.08413 i, 6.22809 + 6.08413 i, 12.2168 − 8.42764 i, 12.2168 + 8.42764 i, 14.3959 − 4.24638 i, 14.3959 + 4.24638 i}

Liste des θ_1 : {−5.31125, −6.22934 + 10.9663 i, −6.22934 − 10.9663 i, −6.14795 + 4.06527 i, −6.14795 − 4.06527 i, −6.0192 + 5.55458 i, −6.0192 − 5.55458 i, −5.94788 + 0.0938751 i, −5.94788 − 0.0938751 i}

Polynôme solution $=1-0.837209\,x+0.617462\,x^2-0.228295\,x^3+0.0335402\,x^4$

θ_0 racine du polynôme pour la solution hypergéométrique généralisée N=4->

$$\frac{1}{729}\,\left(-4\,113\,929\,650\,176+2\,618\,904\,719\,360\,\theta_0-740\,162\,473\,472\,\theta_0^2+125\,306\,271\,680\,\theta_0^3-14\,056\,572\,780\,\theta_0^4+1\,098\,440\,352\,\theta_0^5-60\,962\,787\,\theta_0^6+2\,365\,119\,\theta_0^7-59\,049\,\theta_0^8+729\,\theta_0^9\right)==0$$

$$\theta_1[\theta_0]=\frac{-2\,\left(912\,983\,431\,855\,167\,092\,736-673\,918\,086\,789\,385\,844\,992\,\theta_0+213\,175\,398\,538\,929\,450\,592\,\theta_0^2-38\,089\,887\,541\,593\,896\,788\,\theta_0^3+4\,240\,361\,085\,134\,988\,504\,\theta_0^4-303\,502\,795\,366\,735\,323\,\theta_0^5+13\,758\,421\,815\,713\,790\,\theta_0^6-364\,192\,379\,782\,173\,\theta_0^7+4\,357\,783\,545\,174\,\theta_0^8\right)}{3\,\left(-58\,114\,323\,642\,196\,445\,184+27\,510\,380\,849\,899\,134\,976\,\theta_0-4\,669\,871\,235\,670\,502\,080\,\theta_0^2+281\,195\,158\,468\,883\,188\,\theta_0^3+19\,551\,447\,836\,315\,088\,\theta_0^4-4\,635\,764\,778\,199\,743\,\theta_0^5+351\,579\,708\,682\,785\,\theta_0^6-13\,177\,230\,072\,669\,\theta_0^7+209\,801\,109\,879\,\theta_0^8\right)}$$

Liste des racines θ_0 : {θ_0 → 5.02326, θ_0 → 5.14761 − 16.4971 i, θ_0 → 5.14761 + 16.4971 i, θ_0 → 6.22809 − 6.08413 i, θ_0 → 6.22809 + 6.08413 i, θ_0 → 12.2168 − 8.42764 i, θ_0 → 12.2168 + 8.42764 i, θ_0 → 14.3959 − 4.24638 i, θ_0 → 14.3959 + 4.24638 i}

Liste des θ_1 : {−5.31125, −6.22934 + 10.9663 i, −6.22934 − 10.9663 i, −6.14795 + 4.06527 i, −6.14795 − 4.06527 i, −6.0192 + 5.55458 i, −6.0192 − 5.55458 i, −5.94788 + 0.0938751 i, −5.94788 − 0.0938751 i}

Choix θ_0=5.02326 θ_1=−5.31125

s[1]=−3.45525 s[2]=13.4205 s[3]=1.72455 s[4]=14.3595 e[1]=0.203896 + 0.993213 i e[2]=0.203896 − 0.993213 i e[3]=−1.93152 + 3.19952 i e[4]=−1.93152 − 3.19952 i $\sigma=\frac{1}{3}=0.333333$